Questão 4. (2,0 pontos)

a) Calcule $\displaystyle\int x^7 \operatorname{sen}(x^4)dx$.

b) Seja $f(x) = \displaystyle\int_{2-x}^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt$. Calcule $f'(x)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

(a) $\displaystyle\int x^7 \operatorname{sen}(x^4)\,dx = \int x^4 \operatorname{sen}(x^4)\frac{1}{4}4x^3\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int y \operatorname{sen} y\, dy \overset{\text{partes}}{=} \frac{1}{4}\left[-y\cos y + \int \cos y\right]$$

$\boxed{\begin{array}{l} y = x^4 \\ dy = 4x^3 dx \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} u = y \Rightarrow du = dy \\ dv = \operatorname{sen} y\, dy \Rightarrow v = -\cos y \end{array}}$

$$= \frac{1}{4}(-y\cos y + \operatorname{sen} y) + C = \boxed{\frac{1}{4}\left(-x^4\cos(x^4) + \operatorname{sen}(x^4)\right) + C}$$

(b) Seja $G(x)$ uma primitiva de $\sqrt{1+x^3}$ (tal G existe pois $\sqrt{1+x^3}$ é uma função contínua e o TFC garante sua existência). Também, pelo TFC:

$$f(x) = \int_{2-x}^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt = G(x^2) - G(2-x).$$

Assim:

$$f'(x) = G'(x^2)\cdot 2x - G'(2-x)\cdot(-1)$$

$$\boxed{= \sqrt{1+(x^2)^3}\cdot 2x + \sqrt{1+(2-x)^3}}$$

$$f(1) = \int_{2-1}^{1} \sqrt{1+t^3}\,dt = 0$$

$$f'(1) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é

$$\boxed{y = 3\sqrt{2}(x-1)}$$