Questão 4. (2,0 pontos)

a) Calcule $\int x^7 \cos(x^4) dx$.

b) Seja $f(x) = \int_{2-x}^{x^3} \sqrt{1+t^3}\, dt$. Calcule $f'(x)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

(a) $\int x^7 \cos(x^4)\, dx = \int x^4 \cos(x^4) \cdot \frac{1}{4} 4x^3\, dx$

$y = x^4$
$dy = 4x^3 dx$

$= \frac{1}{4} \int y \cos y\, dy =$

Integração por partes
$u = y \Rightarrow du = dy$
$dv = \cos y\, dy \quad v = \operatorname{sen} y$

$\frac{1}{4}\left(y \operatorname{sen} y - \int \operatorname{sen} y\, dy \right) = \frac{1}{4}\left[y \operatorname{sen} y + \cos y \right] + C$

$$\boxed{= \frac{1}{4}\left[x^4 \operatorname{sen}(x^4) + \cos(x^4) \right] + C}$$

(b) A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1+x^3}$ é contínua.
Pelo TFC, existe $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G'(x) = \sqrt{1+x^3}$.
Pelo TFC, $f(x) = \int_{2-x}^{x^3} \sqrt{1+t^3}\, dt = G(x^3) - G(2-x)$.

Logo $f'(x) = G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(2-x) \cdot (-1)$

$$\boxed{= \sqrt{1+(x^3)^3} \cdot 3x^2 + \sqrt{1+(2-x)^3}}$$

$f(1) = \int_1^1 \sqrt{1+t^3}\, dt$

$f'(1) = 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$

A equação a reta tangente ao gráfico de f em $x=1$ é

$$\boxed{y = 4\sqrt{2}(x-1)}$$