2. (**3,0 pontos**) Seja

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4}).$$

Determine todos os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos. (**Observação:** Se você achar que a derivada de f não existe em algum ponto, justifique.)

(a) Se $x \neq 2$ e $x \neq -2$ então $(x-2)^2(x+2) \neq 0$ e $x^2-4 \neq 0$ e portanto as funções $\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}$ e $\sqrt[3]{x^2-4}$ são deriváveis (pela Regra da Cadeia). Assim, a função $\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$ também é derivável e então f é derivável. Usando então a Regra do Produto e a Regra da Cadeia obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x-2)^2(x+2)]^{-\frac{2}{3}}(2(x-2)(x+2)+(x-2)^2)\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$$

$$+\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cos(\sqrt[3]{x^2-4})(\frac{1}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}})2x.$$

(b) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=2$. Para isso, vamos verificar se existe

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x-2}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})\sqrt[3]{x^2-4}}{(x-2)\sqrt[3]{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3(x+2)^2}}{x-2}\frac{\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{(x+2)^2}\frac{\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \sqrt[3]{4^2},$$

já que , fazendo $u = \sqrt[3]{x^2-4}$, temos que $x \to 2$ implica que $u \to 0$, e então

$$\lim_{x\to 2}\frac{\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{u\to 0}\frac{\text{sen}u}{u} = 1.$$

Assim, f é derivável em $x=2$ e $f'(2) = \sqrt[3]{4^2}$.

(c) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})\sqrt[3]{x^2-4}}{(x+2)\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{x+2}}\frac{\text{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}}.$$

Observe agora que se $x \to -2^+$ então $x+2>0$ e $x+2 \to 0$ e portanto

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Logo

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)^3}{x+2} = -\infty,$$

e já que

$$\lim_{x\to -2} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = 1,$$

temos que

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{x+2}} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = -\infty,$$

o que implica que f não é derivável em $x=-2$.

Conclusão: O conjunto dos pontos em que f é derivável é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\},$$

com

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x-2)^2(x+2)]^{-\frac{2}{3}}(2(x-2)(x+2)+(x-2)^2)\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$$

$$+\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cos(\sqrt[3]{x^2-4})(\frac{1}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}})2x,$$

se $x \neq 2$ e $x \neq -2$, e $f'(2) = \sqrt[3]{16}$.