2. (**3,0 pontos**) Seja

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9}).$$

Determine todos os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos. (**Observação:** Se você achar que a derivada de f não existe em algum ponto, justifique.)

(a) Se $x \neq 3$ e $x \neq -3$ então $(x+3)^2(x-3) \neq 0$ e $x^2-9 \neq 0$ e portanto as funções $\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}$ e $\sqrt[3]{x^2-9}$ são deriváveis (pela Regra da Cadeia). Assim, a função $\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$ também é derivável e então f é derivável. Usando então a Regra do Produto e a Regra da Cadeia obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x+3)^2(x-3)]^{-\frac{2}{3}}(2(x+3)(x-3)+(x+3)^2)\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$$

$$+\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\cos(\sqrt[3]{x^2-9})(\frac{1}{3}(x^2-9)^{-\frac{2}{3}})2x.$$

(b) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=-3$. Pra isso, vamos verificar se existe

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x+3}.$$

Mas

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x+3} = \lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})\sqrt[3]{x^2-9}}{(x+3)\sqrt[3]{x^2-9}}$$

$$= \lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^3(x-3)^2}}{x+3}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{x\to-3}\sqrt[3]{(x-3)^2}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \sqrt[3]{(-6)^2},$$

já que , fazendo $u=\sqrt[3]{x^2-9}$, temos que $x\to-3$ implica que $u\to0$, e então

$$\lim_{x\to-3}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{u\to0}\frac{\mathrm{sen} u}{u} = 1.$$

Assim, f é derivável em $x=-3$ e $f'(-3)=\sqrt[3]{6^2}$.

(c) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=3$.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2+9})}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})\sqrt[3]{x^2-9}}{(x-3)\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{x\to3}\sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x-3}}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$$

Observe agora que se $x \to 3^+$ então $x - 3 > 0$ e $x - 3 \to 0$ e portanto

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Logo

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x+3)^3}{x-3} = +\infty,$$

e já que

$$\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = 1,$$

temos que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x-3}} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = +\infty,$$

o que implica que f não é derivável em $x = 3$.

Conclusão: O conjunto dos pontos em que f é derivável é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\},$$

com

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x+3)^2(x-3)]^{-\frac{2}{3}}(2(x+3)(x-2) + (x+3)^2)\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$$

$$+\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\cos(\sqrt[3]{x^2-9})(\frac{1}{3}(x^2-9)^{-\frac{2}{3}})2x,$$

se $x \neq 3$ e $x \neq -3$, e $f'(-3) = \sqrt[3]{36}$.