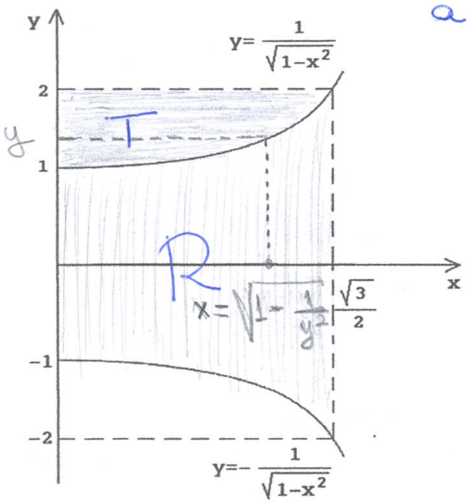
Questão 2. (2,5 pontos) Considere a região

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le y \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$$

a) Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $y = 2$.

b) Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo $0y$.



a) O volume é igual a

$$\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\left(2 - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 8\pi \arcsen x \Big|_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= 8\pi\left(\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsen 0\right) = \frac{8}{3}\pi^2$$

b) Se $x \in [0, \sqrt{3}/2]$ e $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ então

$1 - x^2 = \dfrac{1}{y^2}$ e, portanto, $x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{y^2}}$

O volume do sólido obtido pela rotação da região T (ver figura) em torno de $0y$ é

$$\pi \int_1^2 \left(\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy = \pi\left(y + \frac{1}{y}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(2 + \frac{1}{2} - (1+1)\right) = \frac{\pi}{2}$$

O volume do cilindro de altura 2, cujo raio da base é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, é $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 2 = \frac{3\pi}{2}$

Portanto, o volume pedido é igual a

$$2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$