

Questão 3 - A

a) Calcule $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx$

b) Mostre que o gráfico da função $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^{1/x^3} \left(\frac{1}{1+t^4} + t^{-4/3} \right) dt - 3 \int_x^0 \frac{t^8}{1+t^{12}} dt$$

é parte de uma reta. Determine o coeficiente angular dessa reta.

Solução:

a) Fazendo a substituição $x = 3 \tan(\theta)$ e, em seguida, $u = \sin(\theta)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3 \sec^2(\theta)}{9 \tan^2(\theta) \sqrt{9 \tan^2(\theta) + 9}} d\theta = \frac{1}{9} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{9} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta = \frac{1}{9} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u^2} du = \left(-\frac{1}{9u} \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

b) A derivada da função F é constante

$$F'(x) = \left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{x^3})^4} + x^4 \right) \left(-\frac{3}{x^4} \right) + 3 \frac{x^8}{1 + x^{12}} = -\frac{3x^8}{1 + x^{12}} - 3 + \frac{3x^8}{1 + x^{12}} = -3$$

Portanto $F(x) = -3x + c$. O gráfico de F é uma reta com coeficiente angular -3 .