Questão 3 - B

a) Calcule $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

b) Mostre que o gráfico da função $F :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^{1/x^3} \left(\frac{1}{1+t^4} + t^{-4/3} \right) dt - 3\int_x^0 \frac{t^8}{1+t^{12}} dt$$

é parte de uma reta. Determine o coeficiente angular dessa reta.

Solução:

a) Fazendo a substituição $x = 2\tan(\theta)$ e, em seguida, $u = \mathrm{sen}(\theta)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2\sec^2(\theta)}{4\tan^2(\theta)\sqrt{4\tan^2(\theta)+4}}d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u^2}du = (-\frac{1}{4u})\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

b) A derivada da função F é constante

$$F'(x) = \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x^3})^4} + x^4 \right)\left(-\frac{3}{x^4} \right) + 3\frac{x^8}{1+x^{12}} = -\frac{3x^8}{1+x^{12}} - 3 + \frac{3x^8}{1+x^{12}} = -3$$

Portanto $F(x) = -3x + c$. O gráfico de F é uma reta com coeficiente angular -3.