

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_1^3 \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx = \int_1^3 \frac{x+1}{(x-1)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{x+1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2+2u}{u^2+1} 2du$$

$$(*) \quad \boxed{x = 1 + 2u \Rightarrow dx = 2du \quad \text{e} \quad x + 1 = 2 + 2u}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1} \right] du = \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} du + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u}{u^2+1} du = \arctg(u) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u}{u^2+1} du \stackrel{(**)}{=}$$

$$(**) \quad \boxed{v = u^2 + 1 \Rightarrow dv = 2u du}$$

$$= (\arctg(1) - \arctg(0)) + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln|v| \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\ln|2| - \ln|1|) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$b) \int \frac{\arctg(7x)}{x^3} dx \stackrel{(*)}{=} -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x^2(1+49x^2)} dx = -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+49x^2} \right] dx \stackrel{(**)}{=}$$

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \arctg(7x) & du = \frac{7}{1+49x^2} dx \\ dv = \frac{1}{x^3} dx & v = -\frac{1}{2x^2} \end{array}}$$

$$(**) \quad \boxed{A = 0 \quad B = 1 \quad C = 0 \quad D = -49}$$

$$= -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{-49}{1+49x^2} \right] dx \stackrel{(***)}{=} -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} + \frac{7}{2} \int \frac{-7}{1+u^2} du$$

$$(***) \quad \boxed{u = 7x \quad du = 7 dx}$$

$$= -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} - \frac{49}{2} \arctg(u) + k = -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} - \frac{49}{2} \arctg(7x) + k.$$

Questão 2.

a) Esboce o gráfico de $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua \Rightarrow não existem assíntotas verticais.

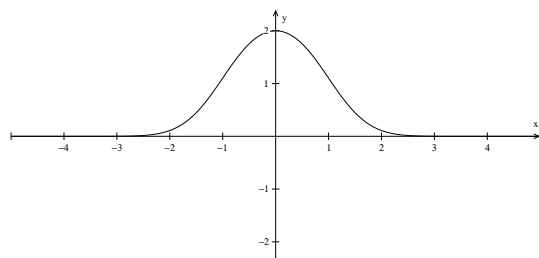
$f'(x) = (-2x^3 - 2x)e^{-x^2} = -2x(x^2 + 1)e^{-x^2} \Rightarrow x = 0$ é o único ponto crítico de f .

$f''(x) = (4x^4 - 2x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

\nearrow	\searrow	f	\cup	\cap	\cup	f
+		-	+		+	f''
0			-1		1	

$\Rightarrow x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ é uma assíntota horizontal $\Rightarrow \bar{\exists}$ assíntotas oblíquas.

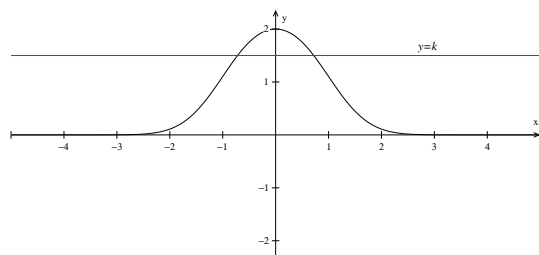


b) Para que valores de k a curva $y = \sqrt{\ln(x^2 + 2) - \ln(k)}$ corta a reta $y = x$?

Se x é um ponto de intersecção das duas curvas, temos:

$$x = \sqrt{\ln(x^2 + 2) - \ln(k)} \Rightarrow x^2 = \ln(x^2 + 2) - \ln(k) \Rightarrow x^2 = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{k}\right) \Rightarrow e^{x^2} = \frac{x^2 + 2}{k} \Rightarrow \boxed{k = (x^2 + 2)e^{-x^2}}$$

Ou seja, $0 < k \leq (c^2 + 2)e^{-c^2}$, onde c é o ponto de máximo de $(x^2 + 2)e^{-x^2} = f(x)$.



Pelo item (a) temos que $c = 0$, portanto $0 < k \leq f(0) = 2$.