VEJA OUTRA SOLUÇÃO NA PROVA B.

(1,5) **Questão 4.** Use o TVM para mostrar que se $e < a < e^2$, então $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$.

Sejam $a \in]e, e^2[$ e $f(x) = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$. A função f é contínua em $[e, a]$ e derivável em $]e, a[$. Pelo TVM, existe $c \in]e, a[$ tal que

$$a^{\ln a} - e^{\ln e} = f'(c)\,(a - e).$$

$$f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2\frac{\ln x}{x} = x^{\ln x} \cdot 2\frac{\ln x}{x}.$$

Temos que mostrar que para $c \in]e, a[$, $f'(c) < 4e^3$.

(1) Observe que $f'(x) > 0$ $\forall x > 1$. Assim, f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$. Em particular, como $e < c < a < e^2$, temos que $f(c) < f(e^2)$, ou seja $c^{\ln c} < (e^2)^{\ln e^2} = e^4$

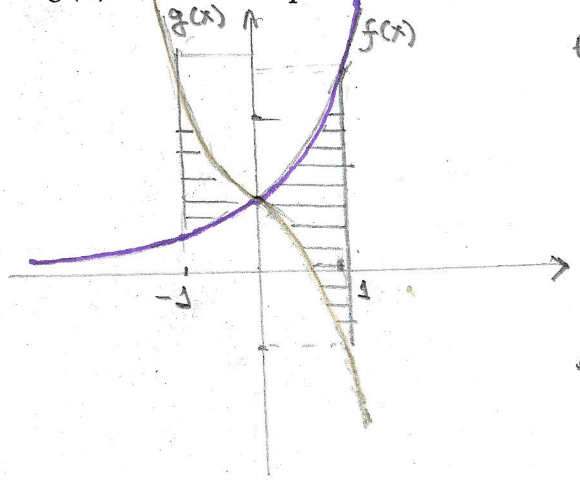
(2) Como $c < e^2$, $\ln c < \ln e^2 = 2$.

(3) Como $c > e$, temos que $\frac{1}{c} < \frac{1}{e}$.

Assim $e^{\ln c} \cdot 2 \cdot \frac{\ln c}{c} \underset{(1)}{<} 2e^4 \frac{\ln c}{c} \underset{(2)}{<} \frac{4e^4}{c} \underset{(3)}{<} 4e^3$.

Temos então $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$, como queríamos.

(1,5) **Questão 5.** Determine a área da figura plana delimitada pelos gráficos de $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1 - 2x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.



A área A da região compreendida entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$ é

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx$$

Se $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 + 2x^3$, então $h'(x) = e^x + 6x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $h(0) = 0$, temos que $h(x) > 0$ se $x > 0$ e $h(x) < 0$ se $x < 0$.

Assim $|f(x) - g(x)| = \begin{cases} 1 - 2x^3 - e^x & \text{se } x \leq 0 \\ e^x - 1 + 2x^3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

$$\text{Logo } A = \int_{-1}^{0} (1 - 2x^3 - e^x)\,dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1 + 2x^3)\,dx$$

$$= \left(x - \frac{2x^4}{4} - e^x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x - x + \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \cancel{-1} + \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + e^{-1} + e \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{2}} - 1$$

$$= \frac{1}{e} + e - 1.$$