(VEJA OUTRA SOLUÇÃO NA PROVA A)

(1,5) **Questão 4.** Use o TVM para mostrar que se $e < a < e^2$, então $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$.

Sejam $a \in]e, e^2[$ e $f(x) = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$. A função f é contínua em $[e, a]$ e derivável em $]e, a[$.

Pelo TVM, existe $c \in]e, a[$ tal que

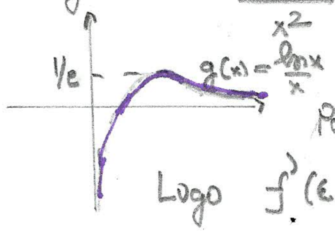
$$a^{\ln a} - e^{\ln e} = f'(c)\,(a - e).$$

$$f'(x) = e^{(\ln x)^2}\, 2\frac{\ln x}{x} = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}.$$

Para $x > 1$, temos que $f'(x) > 0$ e portanto f é estritamente crescente em $[1, +\infty[$. Em particular, como $e < c < a < e^2$, temos que $f(c) < f(e^2)$, ou seja, $c^{\ln c} < (e^2)^{\ln e^2} = e^4$.

Seja agora $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

$g'(x) = \frac{(1 - \ln x)}{x^2}$ e então $\;0 \quad + \; + \quad e \quad - \; - \; - \qquad g'$

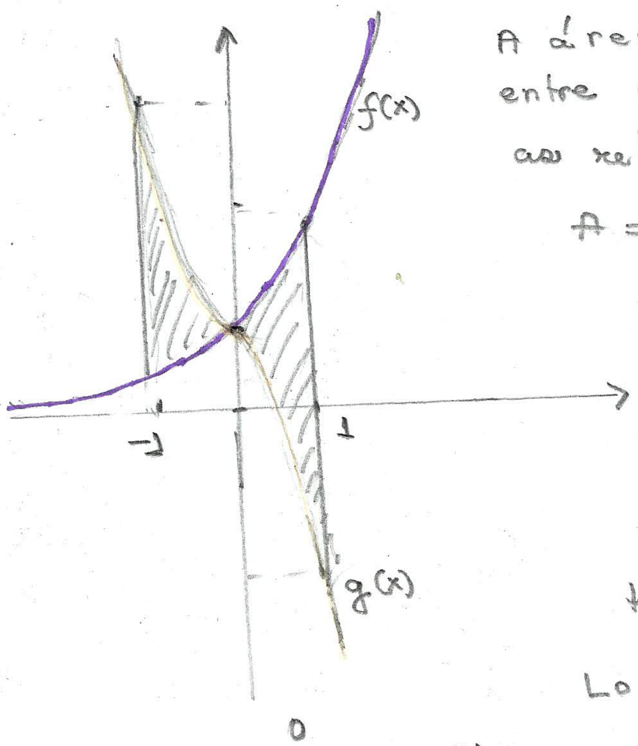


Assim e é ponto de máximo (global) de g.

Portanto, $g(x) \le g(e) = \frac{1}{e}$ $\forall x > 0$.

Logo $f'(c) = 2c^{\ln c}\frac{\ln c}{c} < 2e^4 \cdot \frac{1}{e} < 4e^3$. Portanto $a^{\ln a} - e < 4e^3(a - e)$.

(1,5) **Questão 5.** Determine a área da figura plana delimitada pelos gráficos de $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1 - 3x^3$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.



A área A da região compreendida entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$ é

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Seja $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 + 3x^3$.

Então $h'(x) = e^x + 9x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(0) = g(0) = 1$, temos que $h(0) = 0$. Assim, como $h(x)$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, tem-se que $h(x) > 0$ se $x > 0$ e $h(x) < 0$ se $x < 0$.

Logo $|f(x) - g(x)| = \begin{cases} e^x - 1 + 3x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - 3x^3 - e^x & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Logo $A = \int_{-1}^{0} (1 - 3x^3 - e^x)\,dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1 + 3x^3)\,dx$

$$= \left(x - \frac{3x^4}{4} - e^x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x - x + \frac{3x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \cancel{-1}\,\cancel{+1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{e} + e - 1 + \frac{3}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{e} + e - \frac{1}{2}.$$