3. Calcule ou mostre que não existe.

a) (1,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)$

b) (1,5 ponto) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{y^3}$

$$
\begin{aligned}
a) \quad & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+y^2}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) \\
= \; & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x^2+y^2)}{x^4+y^2}\,\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \; & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+x^3y^2}{x^4+y^2}\,\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \; & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Bigg(\overbrace{x}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}^{limitado}+\overbrace{x^3}^{\to 0}\cdot\overbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}^{limitado}\Bigg)\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \\
= \; & (0+0)\cdot 1 = 0,
\end{aligned}
$$

pois $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}u}{u} = 1.$

b) Seja $g(x,y) = \dfrac{e^{x^2y}-1}{y^3}$. Por um lado

$$\lim_{t\to 0} g(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Por outro

$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t^3}-1}{t^3} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1.$$

Logo, tal limite não existe.