

3. Calcule ou mostre que não existe.

a) (1,5 ponto)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^4} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

b) (1,5 ponto)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{x^3}$

$$\begin{aligned} a) & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^4} \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^4} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3x^2 + y^5}{x^2 + y^4} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \underbrace{y^3}_{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^4}}^{\text{limitado}} + \underbrace{y}_{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\frac{y^4}{x^2 + y^4}}^{\text{limitado}} \right) \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \\ &= (0 + 0) \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

pois  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}u}{u} = 1.$

b) Seja  $g(x, y) = \frac{e^{xy^2} - 1}{x^3}$ . Por um lado

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Por outro

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t^3} - 1}{t^3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Logo, tal limite não existe.