1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})$. Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **Justifique!**

A

Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$

e, analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2y$

que são funções contínuas. Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e portanto diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ver o que acontece com f em $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^{2/3})-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x^{2/3})-1)(\cos(x^{2/3})+1)}{x(\cos(x^{2/3})+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x^{2/3}}{x^{4/3}} \cdot \frac{x^{1/3}}{\cos(x^{2/3})+1} = \lim_{x\to 0} -\left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\to 1 \text{ (limite fundamental)}}\right)^2 \frac{\overbrace{x^{1/3}}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x^{2/3})+1}_{\to 2}} = 0$$

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (observe que $f(x,y) = f(y,x)$).

Temos então um candidato a plano tangente ao G_f em $(0,0,f(0,0)) = (0,0,1)$. Esse plano tem equação:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0),$$

ou seja é o plano $z = 1$.

$$\text{Seja } E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

$$= \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) - 1.$$

Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})-1)(\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\sqrt[3]{x^2+y^2}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})+1)} \frac{(\sqrt[3]{x^2+y^2})^2}{(\sqrt[3]{x^2+y^2})^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\left(\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2 \sqrt[3]{\frac{(x^2+y^2)^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}} \frac{1}{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})+1}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}}}_{\to 0\ (*) \text{ (veja abaixo)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})+1}}_{\to 1/2} = 0$$

(*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\cancel{x}^{\to 0} + 2\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\cancel{y}^{\to 0} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,y^{\to 0}} = 0$$

limitada limitada limitada

Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

Outro modo de calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Faças $u = x^2+y^2$. Então $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u\to 0$;

logo $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u^{1/3})-1}{u^{1/2}}$$

$$\underset{(\frac{0}{0})}{\overset{L'H}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(u^{1/3})\cdot\frac{1}{3}u^{-2/3}}{\frac{1}{2}u^{-1/2}} = \lim_{u\to 0} -\frac{2}{3}\,\frac{\operatorname{sen}(u^{1/3})}{u^{1/3}}\,u^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{u\to 0} -\frac{2}{3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(u^{1/3})}{u^{1/3}}}_{\to 1}\cdot \underbrace{u^{1/6}}_{\to 0} = 0$$

(Veja outra solução na prova tipo B)

De qualquer modo, provamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ o que implica

que f é diferenciável em $(0,0)$.