OUTRA SOLUÇÃO NA PROVA A

1. **(2,0)** Seja $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2})$. Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **Justifique!**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{-2/3} \cdot 2x$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,x, \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

Se $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos(x^{2/3})-1}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$

$$\overset{L'H}{\underset{(0/0)}{=}} \lim_{x\to 0}\left(-\operatorname{sen}(x^{2/3})\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\to 1}\cdot \overbrace{x^{1/3}}^{\to 0} = -\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 0 = 0$$

(limite fundamental)

Logo $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{2/3}}\,x & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Se $(x,y)\neq(0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (x,y).

Em (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\frac{x\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{2/3}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\underbrace{\sqrt[3]{x\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{\to 0}\,\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}}_{\to 1} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

limitada

(limite fundamental)

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Como f é simétrica ($f(x,y) = f(y,x)$) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\,y\,\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{2/3}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e então $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e portanto é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.