2. **(2,5)** Na lista de funções abaixo, existe uma função f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ existe para todo vetor unitário $\vec{\mathbf{u}}$ e f **não** é contínua em $(0,0)$.

(I) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (II) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(III) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+5y^2}$

(a) Prove que a função escolhida não é contínua em $(0,0)$.

(b) Seja $\vec{\mathbf{u}} = (a,b)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ para a função escolhida.

As funções (I) e (III) são contínuas pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{y}_{\to 0} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0 = f(0,0)$$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{2x^2+5y^2} = 0 = f(0,0)$.

Assim, a função que queremos só pode ser (II)!

(a) Vamos mostrar que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

Sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$ $(\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0)$

$\gamma_2(t) = (t,t^2)$ $(\gamma_2(0,0) = (0,0)$ e γ_2 é contínua em $t=0)$

Temos que $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 = L_1$

$\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

(b) Seja $\vec{u} = (a,b)$ com $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(f(0+at, 0+bt) - f(0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{a^2 b t^3}{a^4t^4+b^2t^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2}$$

Se $b=0$, então $a\neq 0$ (pois $a^2+b^2=1$)

Logo $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{a^4t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

Se $b \neq 0$, então

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2 b}{b^2} = \frac{a^2}{b}$.

Assim: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } b=0 \\ a^2/b & \text{se } b\neq 0 \end{cases}$.