2. **(2,5)** Na lista de funções abaixo, existe uma função f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ existe para todo vetor unitário $\vec{\mathbf{u}}$ e f **não** é contínua em $(0,0)$.

B

(I) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (II) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(III) $f(x,y) = \sqrt{3x^2+4y^2}$

(a) Prove que a função escolhida não é contínua em $(0,0)$.

(b) Seja $\vec{\mathbf{u}} = (a,b)$ um vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ para a função escolhida.

As funções (II) e (III) são contínuas em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} = 0 = f(0,0)$$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{3x^2+4y^2} = 0 = f(0,0)$.

Como no enunciado é dito que existe f que NÃO é contínua em $(0,0)$, f só pode ser (I).

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ não existe

pois se $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_1(0) = (0,0)$ e γ_1 é contínua em $t=0$

e $\gamma_2(t) = (t,t^2)$, $\gamma_2(0) = (0,0)$ e γ_2 é contínua em $t=0$

temos que $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 = L_1$ e

$\displaystyle\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} = L_2$ e $L_1 \neq L_2$.

(b) Seja $\vec{u} = (a,b)$ um vetor unitário, isto é, $a^2+b^2=1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{a^2t^2\,bt}{a^4t^4+b^2t^2}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^4t^2+b^2}$$

Se $b \neq 0$ então

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2}{b}$$

Se $b=0$, então $a\neq 0$ já que $a^2+b^2=1$.

Logo $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{a^4t^2+b^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{a^4t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$.

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \begin{cases} a^2/b & \text{se } b \neq 0 \\ 0 & \text{se } b = 0 \end{cases}$