MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012 - Segunda Prova - 15/10/2012

(3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que:

(I) a imagem da curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (t+1, t^2, 2t^5 + t^4 - 2t^3 - t^2)$ está contida no gráfico de f,

(II) a derivada direcional de f no ponto $(3,4)$, na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é igual a $31\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Determine:

1. a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 4, f(3,4))$.

De (I) segue que

$$f(t+1, t^2) = 2t^5 + t^4 - 2t^3 - t^2. \tag{1}$$

Como f é diferenciável temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t+1, t^2) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(t+1, t^2) \cdot 2t = 10t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 2t.$$

Tomando $t = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) \cdot 4 = 10 \cdot 16 + 4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 4 = 164. \tag{2}$$

De (II), sendo f diferenciável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{31\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 31. \tag{3}$$

Somando as equações (2) e (3), temos $5\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 195 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 39.$

De (6), $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = 8.$

Portanto

$$\nabla f(3,4) = (8,39)$$

Além disso, tomando $t = 2$ em (1)

$$f(3,4) = (2 \cdot 2^5 + 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2) = 60.$$

Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3,4,f(3,4)) = (3,4,60)$ é $(z-60) = 8(x-3) + 39(y-4)$, ou

$$z = 8x + 39y - 120.$$

2. a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(3,4)$ nesse ponto.

   Se $\vec{T}$ é um vetor tangente à curva de nível de f no ponto $(3,4)$, temos

$$\vec{T} \cdot \nabla f(3,4) = 0 \Leftrightarrow \vec{T} = \lambda(-39,8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Portanto, a equação da reta tangente é

$$(x,y) = (3,4) + \lambda(-39,8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$