MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012 - Segunda Prova - 15/10/2012

(3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que:

(I) a imagem da curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (t^2, t-1,\, t^5 + t^4 - 4t^3 + 2t^2)$ está contida no gráfico de f,

(II) a derivada direcional de f no ponto $(4,1)$, na direção do vetor $\vec{\mathbf{u}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é igual a $11\sqrt{2}$.

Determine:

1. a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 1, f(4,1))$.

De (I) segue que

$$f(t^2, t-1) = t^5 + t^4 - 4t^3 + 2t^2. \tag{4}$$

Como f é diferenciável temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t-1) \cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t+1, t^2) \cdot 1 = 5t^4 + 4t^3 - 12t^2 + 4t.$$

Tomando $t = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) \cdot 4 + \frac{\partial f}{\partial y}(4,1) \cdot 1 = 5 \cdot 16 + 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 + 8 = 72. \tag{5}$$

De (II), sendo f diferenciável, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(4,1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11\sqrt{2}.$$

Portanto

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(4,1) = 22. \tag{6}$$

Subtraindo (6) de (5), temos $5\frac{\partial f}{\partial x}(4,1) = 50 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4,1) = 10$.

De (6), $\frac{\partial f}{\partial y}(4,1) = 32.$

Portanto,

$$\nabla f(4,1) = (10, 32)$$

Além disso, tomando $t = 2$ em (4)

$$f(4,1) = (2^5 + 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2) = 24.$$

Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 1, f(4,1)) = (4, 1, 24)$ é $(z - 24) = 10(x - 4) + 32(y - 1)$, ou

$$z = 10x + 32y - 48.$$

2. a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém o ponto $(4, 1)$ nesse ponto.

Se $\vec{T}$ é um vetor tangente à curva de nível de f no ponto $(4, 1)$, temos

$$\vec{T} \cdot \nabla f(4,1) = 0 \Leftrightarrow \vec{T} = \lambda(-32, 10), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a equação da reta tangente é

$$(x, y) = (4, 1) + \lambda(-32, 10), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$