MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2º semestre de 2012 - Prova Substitutiva - 03/12/2012

Gabarito - TURMA A

Questão 1.(3 pontos) Seja a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

Solução.

(a) A função f é contínua em $(0,0)$ se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Vamos calcular esse limite.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{x^2+y^2} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{\sqrt[3]{x^4+y^4}} \frac{\sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{x^4+y^4}}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{\sqrt[3]{x^4+y^4}} \sqrt[3]{\left(\frac{x^5(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^3}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{\sqrt[3]{x^4+y^4}}\, x \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)} \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente cada expressão e calcular o limite.

Usando o limite fundamental temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{\sqrt[3]{x^4+y^4}} = 1$

Temos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sqrt[3]{\frac{x^2}{(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}} = 0$. De fato, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3 = 0$, $\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)}$ é limitada, pois $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2$ e $\dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4+y^4}{x^4+y^4+2x^2y^2}$ também é limitada, pois $0 < x^4+y^4 \leq x^4+y^4+2x^2y^2$.

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^4+y^4}\right)}{x^2+y^2} = 1.0 = 0 = f(0,0)$$

OBS: Veja outra forma de calcular o limite na Turma B.

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{h.h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{h.h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{\sqrt[3]{h^4}}.\frac{\sqrt[3]{h^9}}{h^3} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{\sqrt[3]{h^4}} = 1.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0\cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{k^4}\right)}{k.k^2} = 0.$$

(c) Para saber se f é diferenciável vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{||(h,k)||}. \tag{1}$$

Se o limite for 0 a função é diferenciável. Calculando

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\sqrt[3]{h^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{h^4+k^4}\right)}{h^2+k^2} - 0 - 1.h - 0.k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Porém sobre a curva $\gamma(t)=(t,t)$ temos

$$\frac{\sqrt[3]{t^5}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right) - t(2t^2)}{2t^2\sqrt{2t^2}} = \frac{\sqrt[3]{t^5}\,\sqrt[3]{2t^4}\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right)}{2\sqrt{2}\,t^2|t|\,\sqrt[3]{2t^4}} - \frac{t}{\sqrt{2}|t|}$$

Para $t>0$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2}\,t^3\ \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right)}{\sqrt[3]{2t^4}\,2\sqrt{2}\,t^3} - \frac{t}{t\sqrt{2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{2t^4}\right)}{\sqrt[3]{2t^4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{2\sqrt{2}}$$

Como o limite é diferente de 0, o que já permite afirmar que f não é diferenciável. Observe que NÃO EXISTE o limite quanto t tende a 0, pois os limites laterais são diferentes (faça para $t < 0$).

Portanto, f não é diferenciável em $(0, 0)$

Questão 2.(2 pontos) Seja $f = f(x, y)$ uma função diferenciável tal que $z = 3x + y - 2$ é equação do plano tangente a f em $(1, 1, f(1, 1))$.

(a) Obtenha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

(b) Seja $g(u, v) = f(u^2 + 3v, v^2)$. Obtenha as expressões de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ em função das derivadas parciais de f.

(c) Seja γ uma curva diferenciável tal que a sua imagem está contida na intersecção do gráfico de g com a superfície $S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 2v + 1 = 0\}$. Dê a equação da reta tangente a γ no ponto $(2, -1, g(2, -1))$.

Solução.

(a) O plano tangente de f em $(1, 1, f(1, 1))$ tem equação

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

É dado que $z = 3x - y - 2$ é equação do tal plano. Portanto, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$.

Note que já podemos obter $f(1, 1)$, pois

$$-2 = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1).(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1).(-1) = f(1,1) - 3 - 1.$$

Portanto, $f(1, 1) = 2$

(b) Como $g(u, v) = f(u^2 + 3v, v^2)$, segue da regra da cadeia que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u.\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+3v, v^2) + 0.\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+3v, v^2) = 2u.\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+3v, v^2)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 3.\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+3v, v^2) + 2v.\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+3v, v^2)$$

(c) O conjunto S pode ser visto como a superfície de nível 0 da função $h(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 2v + 1$. Como a imagem de γ está contido em S e no gráfico de g então o vetor tangente $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao plano tangente de S e ao plano tangente de g no ponto $\gamma(t_0) = (2, -1, g(2, -1))$.

Temos que $g(2, -1) = f(1, 1) = 2$.

O vetor $(\frac{\partial g}{\partial u}(2,-1), \frac{\partial g}{\partial v}(2,-1), -1)$ é ortogonal ao plano tangente de g e o vetor $(\frac{\partial h}{\partial u}(2,-1,2), \frac{\partial h}{\partial v}(2,-1,2), \frac{\partial h}{\partial w}(2,-1,2)) = (0,0,4)$ é ortogonal a S, no ponto em questão.

($(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial w}) = (2u-4, 2v+2, 2w)$)

Então o vetor $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial g}{\partial u}(2,-1) & \frac{\partial g}{\partial v}(2,-1) & -1 \\ \frac{\partial h}{\partial u}(2,-1,2) & \frac{\partial h}{\partial v}(2,-1,2) & \frac{\partial h}{\partial w}(2,-1,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (28,-48,0)$$

Portanto, a reta tangente procurada tem equação

$$(u,v,w) = (2,-1,2) + \lambda(7,-12,0) \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Questão 3.(3 pontos) Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2z$. Encontre os pontos de máximo e mínimo de f no conjunto $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \text{ e } z \geq -1\}$.

Solução: O conjunto K é compacto e a função polinomial em três variáveis é contínua, portanto os extremantes existem.

Seja $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$ e $h(x,y,z) = z+1$. Então $\nabla f(x,y,z) = (2x-y, 2y-x, 2z-2)$, $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla h(x,y,z) = (0,0,1)$.

Vamos procurar os candidatos a extremante.

a) $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z > -1\}$ (interior do sólido).

Um candidato (x,y,z) neste aberto é tal que $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$. Logo, $2x - y = 0$ $2y - x = 0$ e $2z - 2 = 0 \leftrightarrow x = y = 0$ e $z = 1$. Como $(0,0,1)$ pertence ao conjunto acima, ele é candidato a extremante.

b) $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } z > -1\}$ (parte da casca esférica).

Note que $\nabla g(x,y,z) \neq \vec{0}$ se $g(x,y,z) = 0$. De fato, se $\nabla g(x,y,z) = \vec{0}$ en tão $x = y = z = 0$, mas $g(0,0,0) = -3 \neq 0$. Podemos aplicar os multiplicadores de Lagrange, e um candidato (x,y,z) em $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ é tal que $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, $g(x,y,z) = 0$ e $z > -1$.

Logo $2x - y = \lambda 2x$, $2y - x = \lambda 2y$, $2z - 2 = \lambda 2z$, $g(x,y,z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow y = x(2-2\lambda)$, $x = y(2-2\lambda)$, $z(2-2\lambda) = 2$, $g(x,y,z) = 0$ e $z > -1$

$\Leftrightarrow (x = y = 0,\ z^2 = 3$ e $z > -1)$ ou $(x^2 = y^2 \neq 0,\ x = y(2-2\lambda),\ z(2-2\lambda) = 2,\ g(x,y,z) = 0$ e $z > -1)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,\sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0,\ 1 = (2-2\lambda),\ z(2-2\lambda) = 2,\ g(x,y,z) = 0$ e $z > -1)$ ou $(x = -y \neq 0,\ -1 = (2-2\lambda),\ z(2-2\lambda) = 2,\ g(x,y,z) = 0$ e $z > -1)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,\sqrt{3})$ ou $(x = y \neq 0,\ \lambda = \frac{1}{2}),\ z = 2,\ 2x^2 < 0$ e $z > -1$ (sem solução)) ou $(x = -y \neq 0,\ \lambda = \frac{3}{2},\ z = -2,\ 2x^2 = 3 - 4$ e $z > -1$ (sem solução))

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,\sqrt{3})$.

c) $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 3 \text{ e } z = -1\}$ (parte do plano)

Note que $\nabla h(x,y,z) = (0,0,1) \neq \vec{0}$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x,y,z) em $\{(x,y,z) \in R^3 : z = -1\}$ é tal que $\nabla f(x,y,z) =$

$\lambda\nabla h(x,y,z)$, $x^2+y^2+z^2<3$ e $z=-1$. Logo $2x-y=0$, $2y-x=0$, $2z-2=\lambda$, $x^2+y^2+z^2<3$ e $z=-1$

$\Leftrightarrow x=y=0$, $z=-1$ e $1<3$.

$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,-1)$.

d) $\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=3 \text{ e } z=-1\}$ (intersecção de duas superfícies)

Os vetores $\nabla g(x,y,z)$ e $\nabla h(x,y,z)$ são linearmente independentes para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $g(x,y,z)=0=h(x,y,z)$. De fato, se $(2x,2y,2z)$ e $(0,0,1)$ forem linearmente dependentes para algum (x,y,z) na intersecção das duas superfícies, então , $x=y=0$, $z=-1$ e $z^2=3$, o que é impossível.

Aplicando os multiplicadores de Lagrange, um candidato (x,y,z) nesta curva é tal que $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z)$, $x^2+y^2+z^2=3$ e $z=-1$.

Logo $2x-y=\lambda 2x$, $2y-x=\lambda 2y$,$z=-1$, $-2-2=-\lambda 2+\mu$ e $x^2+y^2=2$

$\Leftrightarrow y=x(2-2\lambda)$, $x=y(2-2\lambda)$, $z=-1$ e $x^2+y^2=2$

$\Leftrightarrow (x=y=0$ e $0=2$ (não tem solução)) ou $x^2=y^2\neq 0$, $z=-1$ e $x^2=1$

$\Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(1,1,-1),(-1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$.

Agora, vamos calcular o valor da função f em cada candidato encontrado acima.

$f(0,0,1)=0+0+1-0-2=-1$, $f(0,0,\sqrt{3})=0+0+3-0-2\sqrt{3}$, $f(0,0,-1)=0+0+1-0+2=3$, $f(1,1,-1)=f(-1,-1,-1)=1+1+1-1+2=4$, $f(1,-1,-1)=f(-1,1,-1)=1+1+1+1+2=6$.

Claramente 6 é o maior valor, logo os pontos de máximo são: $(1,-1,-1)$ e $(-1,1,-1)$.

Agora, $-1<3-2\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{3}<4\Leftrightarrow\sqrt{3}<2\Leftrightarrow 3<4$ e os outros valores são positivos. Portanto -1 é o valor mínimo e o ponto de mínimo é $(0,0,1)$.

Questão 4.(2 pontos) Sejam m número real, $m \neq 0$ e $f(x,y) = x^4 + my^2 - 2x^2$.

(a) Classifique os pontos críticos de f em função de m.

(b) Considere $m = 2$. Encontre os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq y \leq 1\}$$

Solução de a): Seja $m \neq 0$ fixado. Um ponto crítico de f satisfaz

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2my = 0$. Como $m \neq 0$, segue que um ponto crítico de f satisfaz ($x = 0$ ou $x^2 = 1$) e $y = 0$. Logo os pontos críticos são $(0,0)$, $(-1,0)$ e $(1,0)$.

Por ser polinomial, a função é de classe C^2 e podemos classificar os pontos usando o Hessiano.

As derivadas segundas de f são:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2m$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

$H(0,0) = -4.2m - 0 = -8m$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4 < 0$.

Se $m > 0$ então $H(0,0)$ é negativo, e portanto $(0,0)$ é ponto de sela. Se $m < 0$ então $H(0,0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) < 0$, e portanto $(0,0)$ é ponto de máximo.

$H(1,0) = 8.2m - 0 = 16m$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 8 > 0$.

Se $m < 0$ então $H(1,0)$ é negativo, e portanto $(1,0)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(1,0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) > 0$, e portanto $(1,0)$ é ponto de mínimo.

$H(-1,0) = 8.2m - 0 = 16m$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = 8 > 0$.

Se $m < 0$ então $H(-1,0)$ é negativo, e portanto $(-1,0)$ é ponto de sela. Se $m > 0$ então $H(-1,0)$ é positivo e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) > 0$, e portanto $(-1,0)$ é ponto de mínimo.

Solução de b). Temos que considerar os candidatos no interior do conjunto C e na fronteira do conjunto C. Nenhum dos pontos críticos que encontramos em a) estão no interior de C, então os extremantes estão na fronteira.

A fronteira pode ser escrita como a reunião de duas curvas parametrizáveis.

1) Pontos da curva $\{(x,y) :\ y = x^2 \text{ e } -1 < x < 1\}$.

Seja $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $-1 < t < 1$ e $g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^4 + 2t^4 - 2t^2 = 3t^4 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g_1'(t) = 12t^3 - 4t = 0$. Logo $t = 0$ ou $t^2 = \frac{1}{3}$.

Logo, os candidatos a extremante na curva são $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$.

2) Pontos da curva $\{(x,1) : -1 < x < 1\}$.

Seja $\gamma_2(t) = (t,1)$, $-1 < t < 1$ e $g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^4 + 2 - 2t^2$.

Os candidatos a extremamente na curva satisfazem $g_2'(t) = 4t^3 - 4t = 0$. As raízes do polinômio são $t = 0$ ou $t^2 = 1$, mas apenas $t = 0$ corresponde a um ponto no interior do segmento. Logo o único candidato a extremante na curva é $(0,1)$.

3) Extremidades das curvas.

Os candidatos por serem extremidades das curva são $(-1,1)$ e $(1,1)$.

Vamos calcular agora o valor da f em cada candidato:

$f(0,0) = 0$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9} + 2.\frac{1}{9} - 2.\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, $f(0,1) = 0 + 2 - 0 = 2$, $f(-1,1) = f(1,1) = 1 + 2 - 2 = 1$.

O valor mínimo é $-\frac{1}{3}$ e os pontos de mínimo são $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$.

O valor máximo é 2, portanto o ponto de máximo é $(0,1)$.