MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$1^{\underline{a}}$ lista de exercícios - 2013

I - Polinômio de Taylor

1. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:
(a) $\sqrt[3]{8,2}$ (b) $\ln(1,3)$ (c) $\operatorname{sen}(0,1)$

2. Mostre que: a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
b) $0 \leq e^x - \left(1 + x + \dfrac{1}{2}x^2\right) < \dfrac{1}{2}x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.

3. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 5 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em volta de $x_0 = 1$.

4. a) Seja n um número natural ímpar. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$
$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$
b) Avalie $\operatorname{sen}(1)$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

5. a) Determine o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.
b) Avalie e com erro em módulo inferior a 10^{-5}.
c) Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|e^{x^2} - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}\right)\right| \leq \frac{e^{x^2}x^{2n+2}}{(n+1)!}$$
d) Avalie $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$ com erro inferior a 10^{-5}.

6. Mostre que $\displaystyle\left|\int_0^1 \cos(x^2)dx - \left(1 - \frac{1}{5.2!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{13.6!}\right)\right| \leq \frac{1}{15.7!}$

7. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até $2^{\underline{a}}$ ordem em I. Use o polinômio de Taylor de grau 1 e a fórmula de Taylor para provar o "teste da segunda derivada", isto é, prove que se $a \in I$ é um ponto crítico de f e
a) Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f tem mínimo em a.
b) Se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f tem máximo em a.

II - Curvas e Gráficos

8. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a) $\gamma(t) = (1, t)$

(b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \text{sen}\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \text{sen}^2 t)$

(d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\text{sen}\, t)$

(e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t)$

(f) $\gamma(t) = (\text{e}^t \cos t, \text{e}^t\, \text{sen}\, t)$, $t \geq 0$

(g) $\gamma(t) = (\sec t, \text{tg}\, t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$

(i) $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \cos^2 t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$

(j) $\gamma(t) = (2 + \text{e}^{-t}, 3 - \text{e}^t)$, $t \geq 0$

(k) $\gamma(t) = (\text{sen}^4 t + 2\cos^2 t - 2, \text{sen}^2 t - 1)$

9. Esboce C e encontre uma parametrização para C, nos casos:

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \geq -x \text{ e } y \geq x\}$

(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x < 0 \text{ e } y > -10\}$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$

(d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$, sendo $P = (0, 3)$ e r, a reta $y = 4$.

(e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

(f) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1,\ x > 0\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

10. Para cada curva (descrita por equações paramétricas) dos itens de (a) a (f), indique qual das figuras de I a VI representa a sua imagem. Justifique sua escolha.

(a) $x = t^3 - 2t,\quad y = t^2 - t$

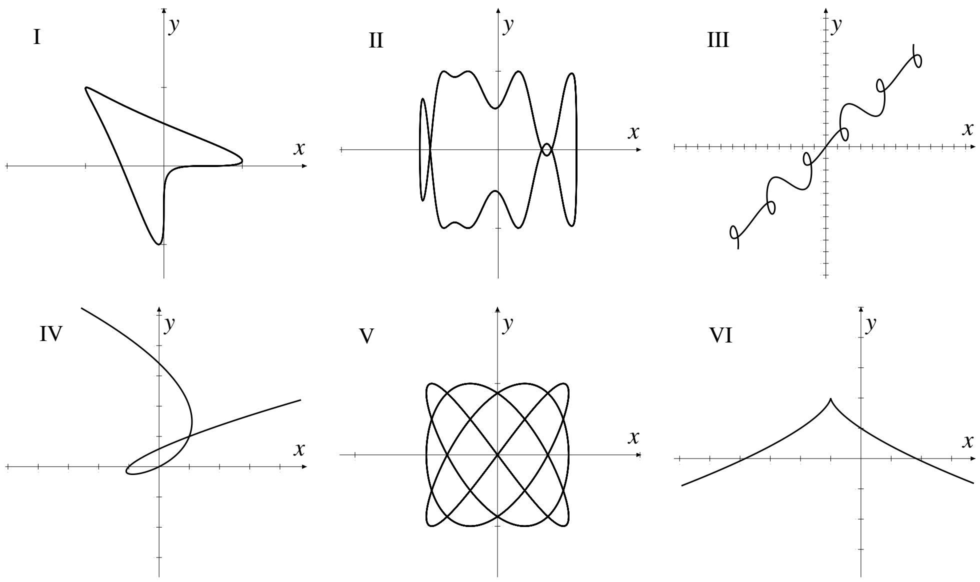
(b) $x = t^3 - 1,\quad y = 2 - t^2$

(c) $x = \text{sen}\,(3t),\quad y = \text{sen}\,(4t)$

(d) $x = t + \text{sen}\,(2t),\quad y = t + \text{sen}\,(3t)$

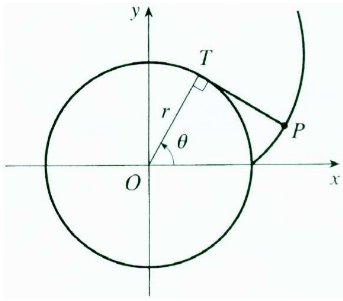
(e) $x = \text{sen}\,(t + \text{sen}\, t),\quad y = \cos(t + \cos t)$

(f) $x = \cos t,\quad y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\,(5t))$

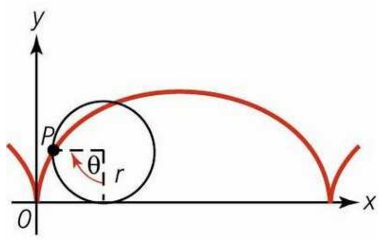


11. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



12. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja figura.)



13. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ (b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (c)$f(x,y) = \sqrt{x-y}$

(d)$f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$ (e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$ (f)$f(x,y) = \operatorname{tg}(x-y)$

(g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

14. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

15. Considere $F(x,y) = \dfrac{10x^2 - 2y}{x^2+y^2}$. Determine o domínio de F e esboce as curvas de nível $c = 0$, $c = 1$ e $c = 10$.

16. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$

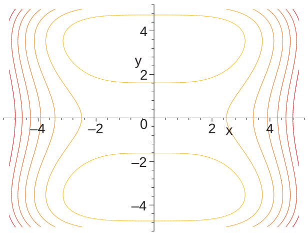
(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$

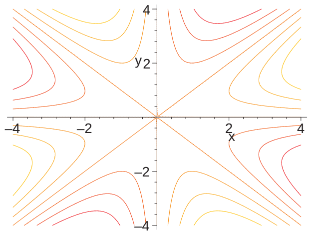
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ (i) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$

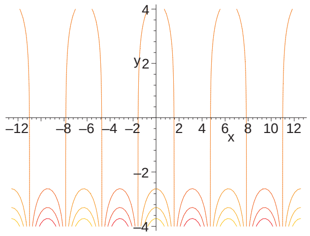
(j) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$ (k) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (l) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

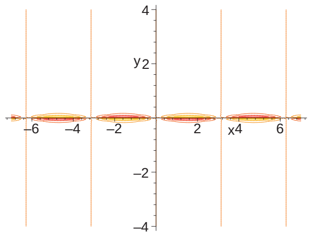
(m) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$

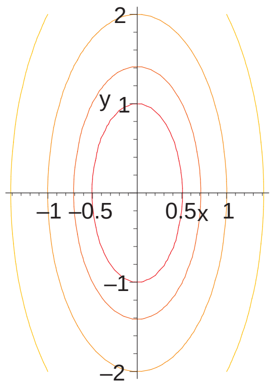
17. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

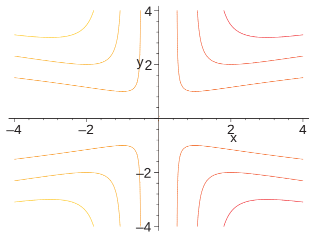
(I) 

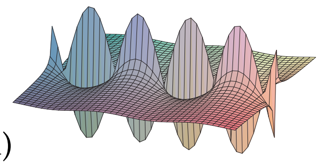
(II) 

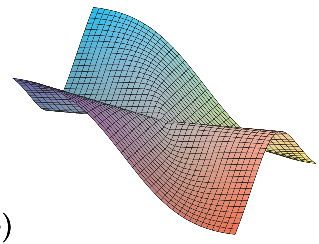
(III) 

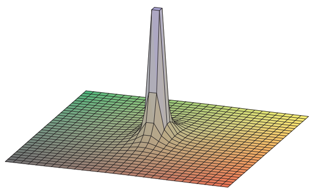
(IV) 

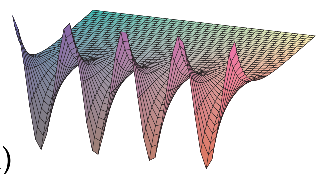
(V) 

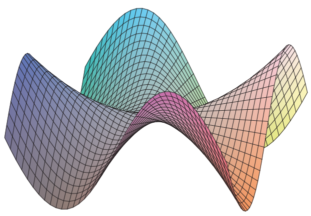
(VI) 

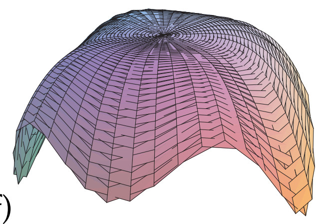
(a) 

(b) 

(c) 

d) 

(e) 

(f) 

18. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

(a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

(b) Verifique que a imagem de γ está contida em uma curva de nível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$ e determine qual o nível.

19. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível k de f nos casos:

(a) $f(x,y) = x + 2y - 3, \; k = -2$

(b) $f(x,y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, \; k = 5$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}, \; k = 1$

(d) $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}, \; k = 1, 2, 3$

20. Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ e mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f indicando qual é o nível.

III - Limite e Continuidade

21. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2 + y^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 y - x y^3}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{y^4 + \operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^4 + x^5 \sqrt[3]{y^4}}{x^6 + y^8}$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^4 + y^2}\right) \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2 y} - 1}{y^3}$

22. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

23. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - y^2)(x-1)^2}{(x^2 + y^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2]}, & \text{se } \; (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1) \\ 1, & \text{se } \; (x,y) = (0,0) \\ 0, & \text{se } \; (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

24. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}\text{sen}\left(e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

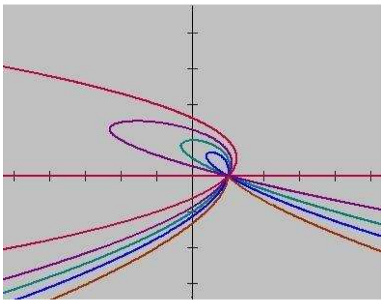
Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

25. Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$.

(a) Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k=1$ e $k=3$.

(b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

26. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$; $k=0,3$; $k=0,5$; $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



RESPOSTAS

13.

(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

(b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$

(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$

(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

(g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

18. (b) $c = 5$.

20. No nível 2.

21.

(a) não existe	(b) 0	(c) 0	(d) não existe
(e) não existe	(f) não existe	(g) não existe	(h) 0
(i) 0	(j) 0	(k) não existe	(l) 1
(m) não existe	(n) 0	(o) 0	(p) não existe

22. (a) 1 (b) 0

23. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

24. Sim, $L = 0$.

25. O limite não existe.

26. O limite não existe.