Prova 2 – 14/10/2013 – Turma A

Questão 2. (3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, uma função de classe C^2 e defina

$$g(u, v) = f(u^2 - v^3, 2u^2 v).$$

a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em termos da função f e de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

b) Se $2x + 4y + 3z = 4$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$, determine $f(0, 2)$, $\nabla f(0, 2)$ e $\nabla g(1, 1)$.

c) Sabendo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 2) = 4$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 2) = 1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1)$.

Solução Primeiramente, observamos que g é uma função de classe C^2, ja que é composta de f, que é de classe C^2, com as funções $x = u^2 - v^3$ e $y = 2u^2 v$ que são de classe C^∞ em (u, v). Dessa forma, as derivadas mistas de f e as derivadas mistas de g são iguais (Teorema de Schwartz).

(a) Usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot (-3v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 2u^2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) \quad &= \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 4u \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 4uv\right] \cdot (-3v^2) \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 4uv\right] \cdot 2u^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) \quad &= 4u \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) - 6uv^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \\
&+ (4u^3 - 12uv^3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) + 8u^3 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - v^3, 2u^2 v).
\end{aligned}$$

(b) Como $z = f(2, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 2)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2)(y - 2)$ e $z = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}$ são duas equações para o mesmo plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$, identificando coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 2) = -\frac{2}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) = -\frac{4}{3} \text{ e } f(0, 2) = -\frac{4}{3}.$$

Logo, $f(0, 2) = -\frac{4}{3}$, $\nabla f(0, 2) = -\frac{2}{3}(\vec{i} + 2\vec{j})$ e $g(1, 1) = f(0, 2) = -\frac{4}{3}$.

Como $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2 v) \cdot 4uv$, temos $\nabla g(1, 1) = -\frac{2}{3}(10\vec{i} + \vec{j})$.

(c) Quando $(u, v) = (1, 1)$, temos $(x, y) = (0, 2)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1) \quad &= 4\frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) - 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) - 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 2) + 8\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 2) \\
&= 4 \times (-\frac{4}{3}) - 6 \times 2 - 8 \times 1 + 8 \times 4 = -\frac{16}{3} + 12 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$