

Teoria dos Modelos: Completude e Método das Constantes

Ricardo Bianconi

Sumário

1	Introdução	1
2	Completude e Compacidade	5
2.1	Dedução formal	5
2.2	Correção, Completude e Compacidade	10
3	Omissão de Tipos	13
4	Exercícios	17

1 Introdução

Estruturas matemáticas carregam consigo, em geral, elementos distinguidos (por exemplo, o zero, como elemento neutro da soma em \mathbb{Z}), operações (a soma e o produto em \mathbb{Z}) e relações (por exemplo, a ordem em um conjunto ordenado). É prática comum usarmos os mesmos símbolos (por exemplo, 0, 1, +, <, etc.) para indicar elementos distinguidos, operações e relações das várias estruturas dentro de uma classe (por exemplo, espaços vetoriais, anéis, corpos ordenados, etc.) Esse conjunto de símbolos será chamado de **assinatura** daquela classe de estruturas. Mais especificamente, uma assinatura é um conjunto $L = C \cup F \cup R$, sendo que C , F e R são conjuntos dois a dois disjuntos, $F = \bigcup_{n \geq 1} F^n$, $R = \bigcup_{n \geq 1} R^n$ e supomos que possamos distinguir se um dado elemento está em C , ou em algum F^n ou em um R^n

(por exemplo, os elementos de C podem ser pares ordenados $(0, i)$, $i \in I$, os de F^n triplas ordenadas $(1, n, j)$ $j \in J$ e os de R^n triplas ordenadas $(2, n, k)$, $k \in K$).

Dada uma assinatura L , uma **estrutura** para L (ou L -estrutura) é uma quadrupla $\mathcal{M} = (M, C^M, F^M, R^M)$ em que M é um conjunto não vazio (o **domínio** da estrutura), C^M é uma aplicação de C em M (isto é, a cada símbolo de constante $c \in C$ associamos um elemento $c^M \in M$), F^M é uma associação dos símbolos de função $f \in F$ a funções $f^M : M^n \rightarrow M$ (sendo f n -ária) e R^M uma associação dos símbolos de relação $P \in R$ a relações (subconjuntos de M^n , sendo P n -ário) P^M em M .

Devido a um saudável abuso de linguagem, denotaremos a estrutura \mathcal{M} por M , seu conjunto subjacente, quando a estrutura estiver subentendida.

Um **morfismo** de L -estruturas é uma aplicação $\Phi : M \rightarrow N$ tal que se $c \in C$, $\Phi(c^M) = c^N$, se $f \in F$ é n -ária, $\Phi(f^M(x_1, \dots, x_n)) = f^N(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n))$, e se $P \in R$ é n -ária, então $(x_1, \dots, x_n) \in P^M$ se, e só se, $(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \in P^N$. Se Φ é bijetora, dizemos que é um **isomorfismo** (de L -estruturas).

Uma **linguagem de primeira ordem** consiste num alfabeto que contém os símbolos lógicos $\wedge, \vee, \neg, \exists$ e \forall , e também o da igualdade $=$ será considerado como símbolo lógico; um conjunto enumerável de símbolos de variáveis $\text{Var} = \{x_n : n \in \omega\}$; símbolos não lógicos são os de uma assinatura L ; além disso a linguagem tem regras (gramaticais) de formação de expressões bem fundadas, ou fórmulas e sentenças.

Como o que muda de uma linguagem a outra é apenas a assinatura L , usaremos o símbolo L também para denotar a linguagem de primeira ordem assim obtida.

Exemplo 1.1 A linguagem da teoria dos grupos contém os símbolos e de constante (para o elemento neutro) e o símbolo de função binária, para a operação do grupo.

Exemplo 1.2 A linguagem da teoria dos anéis contém os símbolos de constantes 0 e 1 , e as operações binárias $+$ e \cdot , com as interpretações usuais.

Exemplo 1.3 A linguagem da teoria dos anéis ordenados contém os símbolos de constantes 0 e 1 , e as operações binárias $+$ e \cdot , uma relação binária \leq , com as interpretações usuais. Pode também ser usado o símbolo de função unária $-$ para o oposto de um elemento.

Para descrever as regras gramaticais, comecemos pelos **termos de L** (ou L -termos):

Somente serão considerados termos as seqüências de símbolos s de L para as quais existe uma seqüência finita s_1, \dots, s_m tal que s é s_m e cada s_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- s_i é uma variável, ou
- um símbolo de constante, ou
- s_i é $f(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ sendo que f é um símbolo de função n -ária e $i_1, \dots, i_n < i$ (isto é, já foram obtidos anteriormente).

Com isto também podemos definir a **complexidade do termo s** , $c(s)$, como o menor m tal que existe uma seqüência como acima.

Agora podemos definir **fórmula de L** (ou L -fórmula).

Somente serão consideradas fórmulas as seqüências de símbolos φ de L para as quais existe uma seqüência finita ϕ_1, \dots, ϕ_m tal que φ é ϕ_m e cada ϕ_i deve satisfazer uma das condições abaixo:

- ϕ_i é $t_1 = t_2$ (ou mais pedantemente, “ $= (t_1, t_2)$ ”), sendo que t_1 e t_2 são termos, ou
- $R(t_1, \dots, t_n)$, sendo que R é símbolo relacional n -ário e t_1, \dots, t_n são termos, ou
- $\phi_j \wedge \phi_k$, ou $\phi_j \vee \phi_k$, ou $\neg\phi_j$, em que $j, k < i$, ou
- $\exists x\phi_k$ or $\forall x\phi_k$, sendo que x é uma variável e $k < i$.

As fórmulas do tipo $t_1 = t_2$ e do tipo $R(t_1, \dots, t_n)$ são chamadas de **fórmulas atômicas**.

Com isto também podemos definir a **complexidade da fórmula φ** como o menor m tal que existe uma seqüência como acima.

Dada uma fórmula φ , definimos como **variáveis livres** as variáveis que ocorram em φ que não estejam no escopo de um quantificador \exists ou \forall .

Mais especificamente, definimos por indução na complexidade de φ o conjunto das variáveis livres de φ , $VL(\varphi)$ como:

- se φ for atômica, $VL(\varphi)$ contém exatamente as variáveis que ocorrem nos termos de φ ;
- se φ for $\neg\psi$, então $VL(\varphi) = VL(\psi)$;
- se φ for $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$ então $VL(\varphi) = VL(\phi_1) \cup VL(\phi_2)$;
- por fim, se φ for $\exists x\psi$ ou $\forall x\psi$ então $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$. Neste caso, x é dita **variável ligada**.

Costuma-se escrever $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ quando $VL(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Uma fórmula φ é uma **sentença** se $VL(\varphi)$ for vazio.

Vamos definir agora a relação de **satisfação**, \models , que relaciona estruturas e fórmulas. Vamos definir esta relação por indução na complexidade das fórmulas. Dadas uma estrutura M , uma **atribuição de valores** $s : \text{Var} \rightarrow M$ e uma fórmula φ , definimos $M \models \varphi[s]$ por etapas.

Primeiramente, definiremos **interpretação de termos** em M dada s , $t^M[s]$ ou apenas $s(t)$, como:

- se t é a constante c , $t^M[s] = c^M$;
- se t é uma variável x , $t^M[s] = s(x)$;
- se t é da forma $f(t_1, \dots, t_n)$, $t^M[s] = f^M(t_1^M[s], \dots, t_n^M[s])$.

Usaremos apenas a notação $s(t)$ no lugar de $t^M[s]$, reservando esta última quando for necessária.

Agora definiremos **interpretação das fórmulas** em M , isto é, a relação $M \models \varphi[s]$ (leia-se M satisfaz φ em s , ou que M é **modelo** de φ):

- se φ é atômica, $P(t_1, \dots, t_n)$ (incluindo o caso $t_1 = t_2$), $M \models \varphi[s]$ se $(s(t_1), \dots, s(t_n)) \in P^M$;
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ e $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $M \models \varphi[s]$ se $M \models \phi_1[s]$ ou $M \models \phi_2[s]$;
- se φ é $\neg\phi$, $M \models \varphi[s]$ se não ocorrer que $M \models \phi[s]$ (ou $M \not\models \phi[s]$);
- se φ é $\exists x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se existir $a \in M$ tal que se $s' : \text{Var} \rightarrow M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$;

- se φ é $\forall x\phi$, $M \models \varphi[s]$ se para cada $a \in M$, se $s' : \text{Var} \rightarrow M$ satisfaz $s'(x) = a$ e $s'(y) = s(y)$ para todas as outras variáveis, então $M \models \phi[s']$

Pelo exercício 4.3, a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ . Neste caso, usando a notação $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ descrita acima, e sendo $a_i = s(x_i)$, podemos escrever a relação $M \models \varphi[s]$ na forma $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. No caso das sentenças, denotaremos $M \models \varphi$, omitindo a atribuição de valores s .

2 Completude e Compacidade

2.1 Dedução formal

Agora trabalharemos (quase) totalmente em L , descrevendo o que é uma demonstração formal em L sem fazer apelo a estruturas. Escolheremos um conjunto de fórmulas para que constituam os axiomas e descreveremos as regras de inferência usadas em demonstrações formais.

Para isto, precisamos olhar mais de perto as fórmulas de L e separar o que é puramente proposicional de quantificação.

Dada uma fórmula φ , o conjunto das **subfórmulas proposicionais** de φ é o conjunto $SFP(\varphi)$ definido por indução:

- se φ é atômica ou da forma $\exists x\phi$ ou $\forall x\phi$, $SFP(\varphi) = \{\varphi\}$ (neste caso chamaremos φ de **fórmula proposicional atômica**);
- se φ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, ou $\phi_1 \vee \phi_2$, então $SFP(\varphi) = SFP(\phi_1) \cup SFP(\phi_2)$;
- se φ é $\neg\phi$, $SFP(\varphi) = SFP(\phi) \cup \{\neg\phi\}$.

Podemos reconstruir uma fórmula φ a partir de suas subfórmulas proposicionais atômicas usando os conectivos proposicionais \wedge , \vee e \neg . Definimos, para simplificar a notação, $A \rightarrow B$ como $\neg A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$ como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. Observe que “ \wedge ” e “ \vee ” podem ser definidos a partir de “ \rightarrow ” e “ \neg ” (como exercício, verifique isto).

Atribuindo-se valores V ou F (verdadeiro ou falso) às subfórmulas atômicas de φ , fazemos a tabela verdade de φ da maneira usual (como exercício, faça isto), determinamos se φ é ou não **tautologia proposicional**. No raciocínio matemático, as tautologias proposicionais são usadas em qualquer demonstração.

Por uma questão técnica que ficará clara adiante tomaremos não as tautologias mas as várias generalizações delas. Uma **generalização** de uma fórmula φ é a fórmula $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n} \varphi$, sendo que $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ é um conjunto (possivelmente vazio) de variáveis, podendo haver até repetições.

Por isto, definimos o primeiro esquema de axiomas:

Axiomas I: Todas as generalizações de cada tautologia proposicional.

Passemos agora ao tratamento da quantificação.

O primeiro problema que encontramos ocorre quando queremos tomar um caso particular de uma fórmula da forma $\forall x \phi$, tirando o quantificador $\forall x$ e trocando x em ϕ por um termo t . Para evitar besteiras do tipo φ é $\forall x \exists y (x \neq y)$, t é a variável y , e a substituição descuidada ficaria $\exists y (y \neq y)$, precisamos definir corretamente este processo.

A **substituição livre** da variável x pelo termo t em ϕ , $S_x^t \phi$ ou $\phi|_{x=t}$, é definida por indução na complexidade de ϕ :

- se ϕ é atômica, $\phi|_{x=t}$ é obtida de ϕ pela substituição de toda ocorrência de x por t ;
- se ϕ é $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \wedge \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi|_{x=t}$ é $\phi_1|_{x=t} \vee \phi_2|_{x=t}$;
- se ϕ é $\exists y \psi$ (ou $\forall y \psi$) e nenhuma variável em t é y , então $\phi|_{x=t}$ é $\exists y (\psi|_{x=t})$ (ou, respectivamente, $\forall y (\psi|_{x=t})$);
- se ϕ é $\exists y \psi$ (ou $\forall y \psi$), mas y ocorre em t , então $\phi|_{x=t}$ é a própria ϕ .

Com isto introduzimos o segundo esquema de axiomas:

Axiomas II: Para cada fórmula ϕ e cada termo t , as generalizações das fórmulas $\forall x \phi \rightarrow (\phi|_{x=t})$ e $(\phi|_{x=t}) \rightarrow \exists x \phi$.

Os próximos tratam de como distribuir quantificação em implicações.

Axiomas III: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ , todas as generalizações de $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)$, $(\exists x \phi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\phi \wedge \psi)$.

Axiomas IV: Para cada par de fórmulas ϕ e ψ , e variável x que não seja livre em ϕ , todas as generalizações de $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x \psi)$, $(\phi \wedge \exists x \psi) \rightarrow \exists x (\phi \wedge \psi)$.

Axiomas V: Para cada fórmula ϕ e variável x , todas as generalizações de $\forall x\phi \rightarrow \neg(\exists x\neg\phi)$ e de $\neg(\exists x\neg\phi) \rightarrow \forall x\phi$.

E, por fim, os axiomas da igualdade.

Axiomas VI: As generalizações de $x = y \rightarrow y = x$, $x = x$ e, para cada símbolo de relação n -ária P e termos t_1, \dots, t_n , as generalizações de

$$P(t_1, \dots, t_n) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i = y_i \right) \rightarrow P(t'_1, \dots, t'_n),$$

sendo que t'_i é obtido de t_i por zero ou mais substituições de ocorrências das variáveis x_j por y_j .

Agora podemos definir **dedução formal** de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ (as “hipóteses”) tal que $VL(\Gamma) = \bigcup\{VL(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ seja finito, é uma seqüência finita de fórmulas ϕ_1, \dots, ϕ_n tal que ϕ_n é φ e cada ϕ_i satisfaz um dos quesitos abaixo:

- ϕ_i é axioma, ou
- $\phi_i \in \Gamma$ (cita uma hipótese), ou
- (*Modus Ponens* ou *Destacamento*) existem $j, k < i$ tais que ϕ_k é $\phi_j \rightarrow \phi_i$, ou
- (*Generalização*) existe $j < i$ e variável $x \notin VL(\Gamma)$ e ϕ_i é a fórmula $\forall x\phi_j$.

Neste caso dizemos que φ é **dedutível a partir de** Γ e escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$. Se Γ é vazio, dizemos apenas que φ é **dedutível**, e escrevemos $\vdash \varphi$.

A regra da generalização nada mais é do que o conhecido argumento de que “como x é arbitrário, vale para todo x ”, e, na verdade, pode ser derivada, ou seja:

Lema 2.1 Se $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi$, então existe dedução de $\forall x\psi$ a partir das hipóteses de Γ em que não se usa a regra de generalização.

Demonstração: Sem perda de generalidade (ou por indução na demonstração), podemos supor que ψ_1, \dots, ψ_n é dedução de ψ a partir de Γ em

que não se usa a regra de generalização. Vamos obter desta uma dedução de $\forall x \psi$ sem usar a regra de generalização, por indução no tamanho da demonstração. Na verdade, a hipótese de indução é que $\Gamma \vdash \forall x \psi_j$, para todo $j < i$, $1 \leq i \leq n$ (sendo que o passo inicial a hipótese é vazia).

Dividimos em três casos:

- se ψ_i é axioma, então $\forall x \psi_i$ também é axioma e, portanto, $\Gamma \vdash \forall x \psi_i$;
- se $\psi_i \in \Gamma$, então $x \notin VL(\psi_i)$ e temos a seguinte dedução:
 1. ψ_i (listamos uma hipótese de Γ)
 2. $\forall x(\psi_i \rightarrow \psi_i)$ (é axioma proposicional)
 3. $\forall x(\psi_i \rightarrow \psi_i) \rightarrow (\psi_i \rightarrow \forall x \psi_i)$ (uma forma do axioma IV)
 4. $(\psi_i \rightarrow \forall x \psi_i)$ (destacamento de 2 e 3)
 5. $\forall x \psi_i$ (destacamento de 1 e 4)
- se ψ_i foi obtida por destacamento, existem $j, k < i$, tais que ψ_k é a fórmula $(\psi_j \rightarrow \psi_i)$ e, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \forall x \psi_j$ e $\Gamma \vdash \forall x(\psi_j \rightarrow \psi_i)$; assim, temos a seguinte dedução, agregada às deduções da hipótese:
 1. $\forall x(\psi_j \rightarrow \psi_i) \rightarrow (\forall x \psi_j \rightarrow \forall x \psi_i)$ uma forma do axioma III)
 2. $(\forall x \psi_j \rightarrow \forall x \psi_i)$ (destacamento de 1 com $\forall x(\psi_j \rightarrow \psi_i)$, obtida anteriormente)
 3. $\forall x \psi_i$ (destacamento de 2 com $\forall x \psi_j$, obtida anteriormente).

Com isto terminamos a demonstração. □

Uma consequência importante e útil disso é o seguinte resultado.

Teorema 2.1 Se o símbolo de constante c não ocorre em nenhuma fórmula de Γ , $x \notin VL(\Gamma)$ e $\Gamma \vdash \psi|_{x=c}$, então $\Gamma \vdash \forall x \psi$.

Demonstração: Denotemos $\theta|_{c=x}$ a operação de trocar todas as ocorrências de c pela variável x na fórmula θ . Observemos que se θ é um axioma, então $\theta|_{c=x}$ também é axioma (verifique caso a caso); se $\theta \in \Gamma$, então $\theta|_{c=x}$ é a própria θ . Observemos também que $(\theta \rightarrow \eta)|_{c=x}$ é a fórmula $(\theta|_{c=x} \rightarrow \eta|_{c=x})$.

Assim, se ψ_1, \dots, ψ_n é dedução de $\psi|_{x=c}$, então $\psi_1|_{c=x}, \dots, \psi_n|_{c=x}$ é uma dedução de $\psi|_{c=x}$ e, como $x \notin VL(\Gamma)$, $\Gamma \vdash \forall x\psi$. \square

O próximo teorema é muito importante, pois diz que a implicação codifica de certa maneira a relação de dedução, \vdash . Além disso será muito útil em aplicações.

Teorema 2.2 (Teorema da Dedução) $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ se, e só se, $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Demonstração: Podemos supor que a regra de generalização não foi usada para mostrar que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$. Assim, basta acrescentar as fórmulas ϕ (hipótese de $\Gamma \cup \{\psi\}$) e ψ (destacamento) a tal dedução, para mostrarmos que $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$.

Para a recíproca, suponha agora que ψ_1, \dots, ψ_n seja dedução de ψ a partir de Γ e ϕ , em que não se usa a regra de generalização. Vamos obter por indução na demonstração que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_j$, $1 \leq j \leq n$:

- se ψ_i é axioma ou elemento de Γ , a seguinte dedução prova que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_i$:
 1. ψ_i (axioma ou hipótese de Γ)
 2. $\psi_i \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_i)$ (axioma I)
 3. $(\phi \rightarrow \psi_i)$ (destacamento);
- se ψ_i foi obtida por destacamento de ψ_j e ψ_k , $j, k < i$, digamos que ψ_k seja a fórmula $(\psi_j \rightarrow \psi_i)$, por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_j$ e $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi_k$; agregamos e essas deduções as seguintes fórmulas:
 1. $(\phi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_i))$ (axioma I)
 2. $(\phi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_i)$ (destacamento de 1 com $(\phi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i))$, obtida anteriormente)
 3. $(\phi \rightarrow \psi_i)$ (destacamento de 2 com $(\phi \rightarrow \psi_j)$, também obtida anteriormente).

Com isso fica provado o teorema. \square

Dizemos que o conjunto Γ é **consistente** se não existir fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Teorema 2.3 $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente se, e só se, $\Gamma \not\vdash \phi$.

Demonstração: Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

Se $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é consistente, seja ψ tal que $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Então $\Gamma \vdash \neg\phi \rightarrow \psi \wedge \neg\psi$. Como $(\neg\phi \rightarrow \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$ é tautologia, $\Gamma \vdash \phi$. \square

2.2 Correção, Completude e Compacidade

Dizemos que φ é **conseqüência semântica** do conjunto de fórmulas Γ (com $VL(\Gamma)$ finito), e denotamos $\Gamma \models \varphi$, se para toda estrutura M e toda atribuição de valores $s : \text{Var} \rightarrow M$, se $M \models \Gamma[s]$ (isto é, se $M \models \gamma[s]$, para cada $\gamma \in \Gamma$), então $M \models \varphi[s]$.

Teorema 2.4 (Teorema da Correção) Se $\Gamma \vdash \phi$ então $\Gamma \models \phi$.

Demonstração: Seja ϕ_1, \dots, ϕ_n uma dedução de ϕ a partir de Γ , em que não foi usada a regra de generalização. Vamos mostrar por indução no comprimento da dedução que $\Gamma \models \phi_i$. Seja M uma estrutura e s atribuição de valores, e suponha que $M \models \Gamma[s]$. Se ϕ_i é axioma ou pertence a Γ então trivialmente $\Gamma \models \phi_i$. Se foi obtida por modus ponens, de ϕ_j e ϕ_k com $j, k < i$ então pela hipótese de indução vemos que $M \models \phi_i[s]$, e portanto $\Gamma \models \phi_i$. \square

A recíproca deste resultado é bem mais trabalhosa e é o chamado Teorema da Completude.

Teorema 2.5 (Teorema da Completude I) Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.

Para provarmos este teorema, provaremos um resultado equivalente.

Teorema 2.6 São equivalentes:

1. Se $\Gamma \models \phi$ então $\Gamma \vdash \phi$.
2. Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$. Neste caso diremos que Γ **tem modelo** ou que M, s é **modelo** de Γ .

Demonstração: (1) \Rightarrow (2): Suponha (1) e que Γ não tenha modelo. Então para qualquer fórmula ϕ , a condição $\Gamma \models \phi$ é vaziamente satisfeita. Por (1), $\Gamma \models \phi$. Em particular se ϕ é $\neg\psi \wedge \psi$. Portanto Γ não é consistente.

(2) \Rightarrow (1): Suponha agora (2) e que $\Gamma \not\models \phi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ é consistente e portanto tem modelo M, s . Mas $M \not\models \phi[s]$ e isto implica que $\Gamma \not\models \phi$. \square

Provemos, então este enunciado. O método, introduzido por Léon Henkin em 1949 chama-se o Método das Constantes e é útil para a construção de modelos.

Teorema 2.7 (Teorema da Completude II) Se Γ é consistente então existe estrutura M e atribuição de valores s tais que $M \models \Gamma[s]$.

Demonstração: Provaremos o caso em que a assinatura L é finita ou enumerável e indicaremos nos exercícios como tratar o caso geral (veja o exercício 4.6).

Introduzindo novas constantes, se necessário, podemos supor que Γ é um conjunto de L -sentenças.

Seja $D = \{d_n : n < \omega\}$ um conjunto (de novas constantes) disjunto de L e $L(D) = L \cup D$. Enumere o conjunto de todas as $L(D)$ -sentenças, $\{\phi_n : n < \omega\}$. Construiremos uma seqüência Γ_n de conjuntos consistentes de $L(D)$ -sentenças (juntando uma quantidade finita de $L(D)$ -sentenças a Γ_0) da seguinte forma:

- seja $\Gamma_0 = \Gamma$;
- suponha construído Γ_n ; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for inconsistente, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$;
- suponha construído Γ_n ; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for existencial (isto é, ϕ_n não é da forma $\exists x\theta$), então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$;
- suponha construído Γ_n ; se $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $j_n = \min\{j < \omega : d_j \text{ não ocorre em nenhuma fórmula de } \Gamma_n\}$ e definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$.

Neste último caso (ϕ_n é $\exists x\theta$), como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ é consistente, se $\Gamma_n \cup \{\phi_n, \theta|_{x=d_{j_n}}\}$ fosse inconsistente, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\theta|_{x=d_{j_n}}$; como d_{j_n} não ocorre em $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$, temos que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \forall x\theta$ (pelo Teorema 2.1) e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \neg\phi_n$, contradizendo a consistência de $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$.

Seja $\Gamma_\infty = \bigcup_{n < \omega} \Gamma_n$. Então Γ_∞ é consistente e, para toda $L(D)$ -sentença ψ , se $\psi \notin \Gamma_\infty$, então $\neg\psi \in \Gamma_\infty$, pois, se ambas estivessem fora de Γ_∞ , não teriam entrado na sua construção. Suponhamos que ψ seja ϕ_m e $\neg\psi$ seja ϕ_n . Podemos supor que $m < n$. Isto significa que $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ e $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seriam ambos inconsistentes. Daí, decorre que $\Gamma_m \vdash \neg\phi_m$ e, portanto $\Gamma_n \vdash \neg\phi_m$, ou seja, $\Gamma_n \vdash \phi_n$. Como $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ também seria inconsistente, $\Gamma_n \vdash \neg\phi_n$, contradição à consistência de Γ_n .

Definimos a relação $d \sim d'$ em D se a fórmula $(d = d')$ está em Γ_∞ . Esta é uma relação de equivalência, pois os axiomas da igualdade estão em Γ_∞ . Seja $[d]$ a classe de $d \in D$ e M o conjunto dessas classes.

Vamos interpretar $L(D)$ no conjunto M :

- se $d \in D$, $d^M = [d]$;
- se $c \in C$ é símbolo de constante de L , $c^M = [d]$, se a fórmula $(c = d)$ está em Γ_∞ ; como $\exists x(c = x)$ está em Γ_∞ , pelo menos uma das fórmulas do tipo $(c = d)$ está em Γ_∞ ;
- se $f \in L$ é símbolo de função n -ária, definimos $f^M([d_{i_1}], \dots, [d_{i_n}]) = [d]$, se a fórmula $f(d_{i_1}, \dots, d_{i_n}) = d$ estiver em Γ_∞ ;
- se $P \in L$ for símbolo de relação n -ária, definimos P^M por $([d_{i_1}], \dots, [d_{i_n}]) \in P^M$ se, e só se, a fórmula $P(d_{i_1}, \dots, d_{i_n})$ estiver em Γ_∞ .

Afirmamos que $M \models \Gamma_\infty$. Pelo fato dos axiomas da igualdade estarem em Γ_∞ (em alguma forma), as sentenças atômicas de Γ_∞ são satisfeitas em M . Por indução na complexidade das fórmulas de Γ_∞ , obtemos que $M \models \Gamma_\infty$ (veja o exercício 4.5). \square

Como corolário deste teorema, temos talvez o resultado mais importante da Teoria dos Modelos.

Teorema 2.8 (Compacidade) Se Γ é um conjunto de sentenças e cada $\Gamma' \subset \Gamma$ finito tem modelo, então Γ tem modelo. \square

Este resultado tem este nome, pois admite uma interpretação topológica (veja o exercício 4.7).

3 Omissão de Tipos

O método das constantes permite provar um teorema útil na classificação de alguns modelos, que é o Teorema da Omissão de Tipos.

Um n -tipo (ou simplesmente tipo) é um conjunto maximal consistente $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$ de L -fórmulas, cujas variáveis livres (se houver) estão contidas no conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, para $n \geq 0$ (no caso $n = 0$, não há fórmulas com variáveis livres, mas apenas sentenças). Sejam $S_n(L)$ os conjuntos de todos os n -tipos de L -fórmulas, $n \geq 0$. Se a assinatura for conhecida no contexto em que usamos $S_n(L)$, poderemos omiti-la da notação, escrevendo apenas S_n . Se $T \in S_0(L)$ é dada, denotaremos $S_n(T) = \{\Gamma \in S_n(L) : T \subseteq \Gamma\}$.

Sejam $T \in S_0(L)$ e $M \models T$. Dizemos que M realiza o tipo $\Gamma \in S_n(T)$ se existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$, para toda $\varphi \in \Gamma$. Caso contrário, dizemos que M omite Γ .

Lema 3.1 Dados $M \models T$ e $\Gamma \in S_n(T)$, então cada $\Gamma \in S_n(T)$ é finitamente satisfatível em M , ou seja, para cada parte finita $\Gamma_0 \subset \Gamma$, existe $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \Gamma_0(\bar{a})$.

Demonstração: Como Γ é consistente e contém T , dado $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito, definindo $\varphi = \bigwedge \Gamma_0$ (a conjunção das fórmulas de Γ_0), $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e, portanto, $T \cup \{\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi\}$ também é consistente. Como $M \models T$ e T é maximal consistente, $M \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$. Seja, então, $\bar{a} \in M^n$, tal que $M \models \varphi(\bar{a})$. \square

Lema 3.2 Dados T e $\Gamma \in S_n(T)$, existe $M \models T$ que realiza Γ . E mais ainda, existe $M \models T$ que realiza todos os n -tipos de $S_n(T)$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Para cada $n \geq 1$ e cada $\Gamma \in S_n(T)$ seja $C_\Gamma = \{c_1^\Gamma, \dots, c_n^\Gamma\}$ um novo conjunto de símbolos de constantes e sejam Γ^* os conjuntos de fórmulas obtidos de Γ pela substituição de cada variável livre x_j pelo símbolo c_j^Γ , $1 \leq j \leq n$. Então $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\Gamma \in S_n(T)} \Gamma^*$ é um conjunto consistente de sentenças na linguagem estendida pelas novas constantes (por compacidade) e, portanto tem modelo. As interpretações das novas constantes realizarão os diversos tipos. \square

Dados $T \in S_0$ e $\Gamma \in S_n(T)$, dizemos que a fórmula φ isola Γ , ou que Γ é isolado por φ , se $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Dizemos que Γ é tipo não isolado.

Lema 3.3 Se $\Gamma \in S_n(T)$ é isolado (por φ), então todo $M \models T$ realiza Γ .

Demonstração: Exercício. □

Para tipos não isolados, temos o seguinte teorema (que pode ser generalizado: veja o exercício 4.8 adiante).

Teorema 3.1 (Omissão de Tipos) Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dada T e dado $\Gamma \in S_n(T)$, um tipo não isolado, existe $M \models T$ que omite Γ .

Demonstração: Seja $D = \{d_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto de novas constantes e $L(D) = L \cup D$ a assinatura L estendida com D . Enumere as $L(D)$ -sentenças $\{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$ e enumere as n -uplas de D , $D^n = \{\bar{d}_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Construiremos um conjunto maximal consistente Γ_∞ , como no caso do Teorema da Completude, mas imporemos mais uma cláusula para garantir que o modelo construído não realize o tipo Γ .

Inicialmente façamos $\Gamma_0 = T$. Por indução em n construiremos um conjunto de $L(D)$ -fórmulas Γ_{n+1} contendo Γ_n , que seja consistente e satisfazendo os quesitos:

- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for inconsistente, $\Gamma'_n = \Gamma_n$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n não for da forma $\exists x\psi$, então $\Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$;
- se $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ for consistente e ϕ_n for da forma $\exists x\theta$, seja $d \in D$ a primeira constante na enumeração dada que não ocorre em nenhuma fórmula de $\Gamma_n \cup \{\psi_n\}$, e façamos $\Gamma'_n = \Gamma_n \cup \{\psi_n, \theta|_{x=d}\}$. Este conjunto é consistente, pois senão $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \neg\psi|_{x=c}$ e, portanto, $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \vdash \forall x(\neg\theta)$ o que implica que $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ seria inconsistente, uma contradição.
- Uma vez obtido Γ'_n , temos que impor a não realização do tipo Γ , ou seja, imporemos que a n -upla \bar{d}_n não realize o tipo. Como o tipo é não isolado, existe $\sigma \in \Gamma$, tal que $\Gamma'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{d}_n)\}$ é consistente, pois senão

$\Gamma'_n \vdash \theta(\bar{d}_n)$, para toda $\theta \in \Gamma$, e, neste caso, se φ for a conjunção de todas as fórmulas de $\Gamma' \setminus T$, retirando as constantes novas e colocando as variáveis livres correspondentes, (ou se for uma fórmula de T se $\Gamma' \setminus T = \emptyset$), então, pelo teorema da dedução, $T \vdash \varphi \rightarrow \theta$, para toda $\theta \in \Gamma$, ou seja, φ isolaria Γ , uma contradição. Assim, definimos $\Gamma_{n+1} = \Gamma'_n \cup \{\sigma(\bar{d}_n)\}$.

Fazendo $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$, e construindo o modelo M pelo método das constantes, ele omitirá Γ , devido às condições que impõem que nenhuma n -upla de D realizaria Γ . \square

Vamos fazer algumas aplicações desse resultado importante. Na verdade, usaremos sua versão generalizada, que permite omitir uma seqüência Γ_j , $j \in \mathbb{N}$, de n_j -tipos (veja o exercício 4.8).

Primeiramente, chamamos uma teoria $T \in S_0(L)$ de ω -**categórica** se T tem modelos enumeráveis e todos esses modelos são isomorfos entre si.

Lema 3.4 Suponha que a assinatura L é finita ou enumerável e que existam infinitos tipos distintos em $S_n(T)$. Então existe um tipo $\Gamma_\infty \text{ in } S_n(T)$ não isolado.

Demonstração: Suponha que todos os tipos de $S_n(T)$ sejam isolados. Como L é finita ou enumerável, existem no máximo uma quantidade enumerável de tipos em $S_n(T)$, Γ_j , $j \in \mathbb{N}$. Suponha que $\varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ isole o tipo Γ_j , ou seja, $T \cup \{\varphi\}$ é consistente e $T \vdash \varphi_j \rightarrow \psi$, para toda $\psi \in \Gamma_j$. Em particular, como Γ_j é maximal consistente, $\varphi_i \in \Gamma_j$. Podemos ainda afirmar que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k , pois existe $\psi \in \Gamma_j$, tal que $\neg\psi \in \Gamma_k$. Seja $\Delta = \{\neg\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$. Então Δ é consistente com T , pois, senão, $T \cup \{\neg\varphi_0, \dots, \neg\varphi_N\}$ seria inconsistente, para algum $N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, por compacidade, ou seja, $T \cup \{\bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j\}$ seria inconsistente, o que implicaria que $T \vdash \neg\bigwedge_{j=0}^N \neg\varphi_j$, ou seja, $T \vdash \bigwedge_{j=0}^N \varphi_j$. Isso implica, em particular, que $\bigwedge_{j=0}^N \varphi_j \in \Gamma_{N+1}$ e, portanto, $\varphi_k \in \Gamma_{N+1}$, para algum K , $0 \leq k \leq N$ pois o conjunto Γ_{N+1} é maximal consistente e contém T . Mas isto contradiz o fato observado acima, que se $k \neq j$, então φ_j não é consistente com Γ_k . Ou seja, qualquer lista enumerável de tipos isolados não pode esgotar todo $S_n(T)$ e, portanto, existe um tipo não isolado em $S_n(T)$. \square

Na verdade, a hipótese de que L seja finita ou enumerável não é essencial nesse lema. Basta que $S_n(T)$ seja infinito para que contenha um tipo não isolado (faça isso como exercício).

Lema 3.5 Se $S_n(T)$ for finito, então todos os seus n -tipos são isolados.

Demonstração: Se houver um único tipo $\Gamma \in S_n(T)$, então $T \vdash \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$ e, portanto $T \vdash \bigwedge_{j=1}^n (x_j = x_j) \rightarrow \psi$, para toda $\psi \in \Gamma$. Se houver mais de um n -tipo, digamos $S_n(T) = \{\Gamma_0, \dots, \Gamma_N\}$, para algum $N > 0$, existiriam fórmulas $\psi_j \in \Gamma_j \setminus \bigcup_{j \neq i, 0 \leq i \leq N} \Gamma_i$. Tais fórmulas isolam seus tipos. \square

Teorema 3.2 Seja L finita ou enumerável e $T \in S_0(L)$ uma teoria que tem modelos infinitos. Então T é ω -categórica se, e somente se, $S_n(T)$ é finito, para cada $n > 0$.

Demonstração: Se algum $S_n(T)$ fosse infinito, teríamos pelo menos dois modelos enumeráveis de T , M_1 e M_2 e um tipo não isolado $\Gamma \in S_n(T)$ omitido em M_1 e realizado em M_2 . Tais modelos não podem ser isomorfos, pois se fossem, a (pré-)imagem de n -upla que realizasse o tipo em M_2 necessariamente teria que realizá-lo em M_1 .

Por outro lado, se todos os $S_n(T)$ fossem finitos, todos os tipos seriam isolados e, se M_1 e M_2 são dois modelos enumeráveis de T , ambos teriam que realizar todos os tipos sobre T . Enumerando-os, $M_1 = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ e $M_2 = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$, construímos um isomorfismo entre os dois modelos pelos método de vai-e-vem:

- seja $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \text{tp}^{M_1}(a_0)\}$, sendo que $\text{tp}^{M_1}(a)$ é o tipo de a em M_1 , ou seja, o conjunto de fórmulas $\psi(x_1)$, tais que $M_1 \models \psi(a)$; definimos $f(a_0) = b_{j_0}$;
- seja, agora, $j_1 = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0\})$ e seja $i_1 = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \text{tp}^{M_2}(b_{j_0}, b_{j_1})\}$, e definimos $f(a_{i_1}) = b_{j_1}$;
- suponha que já tenhamos definido $f : \{a_0, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \mapsto \{b_{j_0}, \dots, b_{j_k}\}$, para k ímpar; seja $i_{k+1} = \min(\mathbb{N} \setminus \{0, i_1, \dots, i_k\})$ e seja $j_{k+1} = \min\{j \in \mathbb{N} : b_j \text{ realiza } \text{tp}^{M_1}(a_0, a_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+1}}) = b_{j_{k+1}}$; seja $j_{k+2} = \min(\mathbb{N} \setminus \{j_0, j_1, \dots, j_{k+1}\})$ e seja $i_{k+2} = \min\{i \in \mathbb{N} : a_i \text{ realiza } \text{tp}^{M_1}(b_{j_0}, b_{j_1}, \dots, b_{j_{k+2}})\}$, e defina $f(a_{i_{k+2}}) = b_{j_{k+2}}$.

Com isto construímos um isomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$, provando que todos os modelos enumeráveis de T são isomorfos. \square

4 Exercícios

Exercício 4.1 Uma medida de complexidade de um termo t , $c'(t)$, pode ser definida por recursão, assim: se t é uma variável ou constante, $c'(t) = 1$ e se t é $f(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$, então $c'(t) = 1 + \max \{c'(t_1), \dots, c'(t_n)\}$. Mostre que $c(t)$ e $c'(t)$ são compatíveis, isto é, que $c(t_1) \leq c(t_2)$ se, e só se, $c'(t_1) \leq c'(t_2)$. (Portanto será usada no texto a medida mais conveniente conforme o caso, sem menção explícita.)

Exercício 4.2 O mesmo que o exercício anterior mas para fórmulas.

Exercício 4.3 Mostre que a relação $M \models \varphi[s]$ só depende das variáveis livres de φ , isto é, se $s'(y) = s(y)$, $y \in VL(\varphi)$, então $M \models \varphi[s']$.

Exercício 4.4 Mostre que se $\Phi : M \rightarrow N$ é morfismo, então se φ for atômica ou negação de atômica, então $M \models \varphi[s]$ se, e só se, $N \models \varphi[\Phi \circ s]$.

Exercício 4.5 Preencha os detalhes da demonstração de que a estrutura M é modelo de Γ_∞ no Teorema da Completude.

Exercício 4.6 Mostre que se Γ é consistente, então tem modelo, no caso em que a assinatura L seja não enumerável. [Sugestão: seja $\kappa > \omega$ o cardinal de L ; seja $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ um conjunto de κ novas constantes; enumere as $L(D)$ -sentenças por $\{\phi_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e construa $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \Gamma_\alpha$, se λ for ordinal limite, e $\Gamma_{\alpha+1}$ como no caso enumerável.]

Exercício 4.7 Para cada $n \geq 0$ e cada ϕ , com $VL(\phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, sejam $U_\phi = \{\Gamma \in S_n(L) : \phi \in \Gamma\}$. Estes conjuntos formam uma base de uma topologia de $S_n(L)$ totalmente desconexa e compacta, ou seja, mostre que:

1. o conjunto de tais U_ϕ é fechado por uniões e interseções finitas e também por complementos; como o complemento de um aberto é fechado, tais conjuntos são, ao mesmo tempo, abertos e fechados;

2. os conjuntos abertos de $S_n(L)$ são as uniões arbitrárias desses conjuntos; a topologia de $S_n(L)$ é o conjunto τ de todos os conjuntos abertos;
3. essa topologia é Hausdorff, ou seja, dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S_n(L)$ distintos, existem $U, V \in \tau$ disjuntos, tais que $\Gamma_1 \in U$ e $\Gamma_2 \in V$;
4. essa topologia é compacta, ou seja, se $F_i, i \in I$, for uma família de conjuntos fechados (complementos de abertos) em $S_n(L)$, tal que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, então existe $I_0 \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{i \in I_0} F_i = \emptyset$.

Exercício 4.8 O objetivo deste exercício é provar esta versão mais geral do

Teorema da Omissão de Tipos: Suponha que a assinatura L é finita ou (infinita) enumerável. Dado conjunto consistente de sentenças (não necessariamente maximal) T e dados $\Gamma_j \in S_{n_j}(T)$ tipos não isolados $j \in \mathbb{N}$, existe $M \models T$ que omite todos esses tipos.

Para isto, resolva os itens a seguir. No que se segue, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ e $D_n = \{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$, conjunto de novas constantes a serem juntadas à assinatura L , obtendo-se a assinatura $L(D) = L \cup D$ (com $D \cap L = \emptyset$). Uma **enumeração de Henkin** (de $L(D)$ -sentenças) é um conjunto maximal consistente de $L(D)$ -sentenças X , tal que se $\phi \in X$ é uma $L(D_k)$ -fórmula tendo x como única variável livre, então existe $a \in D_{k+1}$ tal que $\phi|_{x=a} \in X$. Seja $H(T)$ o conjunto de todas as enumerações de Henkin (contendo T), como descritas acima.

1. Mostre que $H(T)$ é subconjunto fechado e não vazio de $S_0^{L(D)}(T)$ (o conjunto de todas as $\Gamma \in S_0(L(D))$ maximais consistentes).
2. **(2,0 pontos)** Mostre que se $\Gamma \in S_n^L(T)$ é um tipo não isolado, então $F(\Gamma) = H(T) \cap \bigcap_{\phi \in \Gamma} U_\phi$ é um fechado de $H(T)$ de interior vazio (ou seja, não existe nenhuma $L(D)$ -sentença ψ , tal que $U_\psi \subseteq F$).
3. Usando o fato de que todo espaço compacto tem a propriedade de Baire (ou seja, união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio), mostre que dados tipos $\Gamma_j \in S_{n_j}^L(T)$, $j \in \mathbb{N}$, não isolados, então existe $\Delta \in H(T) \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcap_{\phi \in \Gamma_j} U_\phi$

4. Mostre que o modelo obtido pelo método das constantes correspondente a Δ omite cada tipo Γ_j , $j \in \mathbb{N}$.

Exercício 4.9 Dado conjunto maximal consistente T de L -sentenças, L finita ou enumerável e seja $S(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n(T)$ (observe que $S_0(T) = \{T\}$).

1. Mostre que $S(T)$ é enumerável se, e só se, os tipos isolados de cada $S_n(T)$ são densos em $S_n(T)$, $n \geq 1$, ou seja, para cada ϕ existe um tipo isolado em U_ϕ . [Observe-se que, por serem espaços compactos, cada $S_n(T)$ só pode ter no máximo uma quantidade enumerável de tipos isolados. Mostre que se os tipos isolados não são densos em algum $S_n(T)$, então existem 2^{\aleph_0} tipos não isolados: para isto, construa uma árvore binária de abertos U_ϕ , indexando as ϕ com seqüências binárias finitas, começando com uma ϕ_\emptyset , tal que U_{ϕ_\emptyset} não contenha nenhum tipo isolado e mostre que existe $\phi_{\langle 0 \rangle}$ tal que, se $\phi_{\langle 1 \rangle}$ for a fórmula $\neg\phi_{\langle 0 \rangle}$, então $\emptyset \neq U_{\phi_{\langle 0 \rangle}} \subset U_\emptyset$ e $\emptyset \neq U_{\phi_{\langle 1 \rangle}} \subset U_\emptyset$, etc.]
2. Mostre que se $S(T)$ é enumerável e $M \models T$ é modelos enumerável, então dado $A \subseteq M$, $S^{L(A)}(T_{L(A)}(M))$ também é enumerável, sendo que $T_{L(A)}(M)$ é a $L(A)$ -teoria de M , ou seja, o conjunto de todas as $L(A)$ -sentenças verdadeiras em M .

Índice Remissivo

- $M \models \Gamma[s]$, 10
- $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, 5
- $M \models \varphi[s]$, 4
- $SFP(\varphi)$, 5
- S_n , 13
- $S_n(L)$, 13
- $S_n(T)$, 13
- $VL(\varphi)$, 3
- $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, 4
- n -tipo, 13
- $t^M[s]$, 4
 - $s(t)$, 4
- L -estrutura, 2

- assinatura, 1
- atômica
 - fórmula, 3
- axiomas
 - igualdade, 7
 - proposicionais, 6
 - quantificação, 6
- Categoricidade
 - ω -categoricidade, 15
- complexidade
 - fórmula, 3, 17
 - termo, 3, 17
- conseqüência semântica, 10
 - $\Gamma \models \varphi$, 10
- consistente, 9

- dedução formal, 7
- destacamento, 7

- eliminação de constantes, 8
- estrutura, 2

- domínio, 2
- morfismo, 2
- satisfação, 4

- fórmula, 3, 6
 - atômica, 3
 - complexidade, 3, 17
 - dedutível, 7
 - $\Gamma \vdash \varphi$, 7
 - $\vdash \varphi$, 7
 - a partir de Γ , 7
 - proposicional atômica, 5
 - sentença, 4
 - substituição livre
 - de variável por termo, 6

- generalização, 7
 - de constantes, 8
 - regra derivada, 7

- interpretação
 - fórmulas
 - $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$, 5
 - $M \models \varphi[s]$, 4
 - sentenças
 - $M \models \varphi$, 5
 - termos, 4
 - $s(t)$, 4
 - $t^M[s]$, 4

- L -estrutura
 - isomorfismo, 2
 - morfismo, 2
- linguagem
 - fórmula, 3
 - símbolos lógicos, 2

- termo, 3
- teoria de anéis, 2
- teoria de anéis ordenados, 2
- teoria de grupos, 2
- método das constantes, 11
- modelo, 10
 - de φ , 4
- Modus Ponens*, 7
- morfismo, 2

- Omissão de Tipos, 14
 - generalizado, 17

- regra de inferência
 - Modus Ponens*, 7
 - destacamento, 7
 - generalização, 7
 - regra derivada, 7

- satisfação, 4
- sentença, 4
- subfórmulas proposicionais, 5
- substituição livre
 - de variável por termo, 6

- tautologia proposicional, 5
- Teorema
 - da Completude, 10, 11
 - da Correção, 10
 - da Dedução, 9
 - Omissão de Tipos, 14
 - generalizado, 17
- Teoria
 - ω -categórica, 15
- termo
 - complexidade, 3, 17
 - definição, 3
 - interpretação, 4

- $s(t)$, 4
- $t^M[s]$, 4
- tipo, 13
 - isolado, 14
 - por φ , 14
 - não isolado, 14

- variáveis
 - ligadas, 4
 - livres, 3