MAT-230: Geometria e Desenho Geométrico I

Notas de Aula e Exercícios - Prof. Ricardo Bianconi

2º Semestre de 2001

1. Introdução: O objetivo desta disciplina é discutir os fundamentos da geometria euclideana (*o quê* e o *porque* das construções geométricas estudadas). Vamos fazer isto introduzindo definições dos vários objetos a serem estudados e *postulados*, que vão definir e restringir as propriedades de tais objetos e "regulamentar" as construções geométricas permitidas. Vai ser muito importante o estudo do *Postulado das Paralelas* (que diz que dada uma linha ℓ e um ponto P fora dela, então exite uma única linha passando por P e paralela a ℓ). Desde os tempos de Euclides (em torno de 300 AC) até o século XIX, diversos matemáticos tentaram *provar* este postulado a partir dos outros. Estas tentativas foram extremamente frutíferas no sentido de se descobrirem várias construções geométricas importantes, bem como novas geometrias em que não vale o postulado. Estas novas geometrias é que permitiram Einstein formular a Teoria da Relatividade Geral (como ele mesmo reconheceu).

Neste texto estão incluídos vários exercícios. Os desenhos explicativos irão surgir numa edição posterior deste texto. Convido os leitores a fazerem seus próprios desenhos, tentando entender o que está escrito.

---

2. Postulados de Incidência: Vamos começar definindo o contexto de nosso trabalho. Uma **geometria (plana) de incidência** é um conjunto π que chamamos de plano, cujos elementos são chamados de **pontos** e com alguns subconjuntos de π chamados de **linhas**. Os postulados de incidência impõem as primeiras restrições sobre as linhas:

Postulado 1: Dados dois pontos distintos P e Q, existe uma única linha contendo P e Q, que podemos denotar como $\overleftrightarrow{PQ}$

Postulado 2: Cada linha contém pelo menos dois pontos.

Postulado 3: Existem pelo menos três pontos não colineares (ou seja, não numa mesma linha).

Com isto ainda temos uma classe muito grande de possibilidades, inclusive geometrias finitas. Por exemplo, $\pi = \{A, B, C\}$ um plano com três pontos, tendo como linhas $\ell_1 = \{A, B\}$, $\ell_2 = \{A, C\}$ e $\ell_3 = \{B, C\}$. É claro que valem os três postulados para esta geometria.

Exercício 1: Dada uma linha ℓ, mostre que existe um ponto P fora de ℓ. (Que postulados garantem isto?)

Exercício 2: Uma **Geometria Projetiva Plana** é uma geometria de incidência que também satisfaz mais dois postulados: cada linha tem pelo menos três pontos e, dadas duas linha distintas ℓ_1 e ℓ_2, existe um único ponto comum às duas linhas. Mostre que $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ com $\ell_1 = \{A, B, C\}$, $\ell_2 = \{A, D, E\}$, $\ell_3 = \{A, G, F\}$, $\ell_4 = \{C, G, D\}$, $\ell_5 = \{C, F, E\}$, $\ell_6 = \{B, G, E\}$ e $\ell_7 = \{B, D, F\}$ é uma geometria projetiva. (Verifique se valem todos os postulados.)

Exercício 3: O plano da **Geometria Analítica** é o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais. As linhas são as retas $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$. Mostre que esta é uma geometria de incidência. (Verifique se valem os postulados: para o primeiro, ache a equação da reta que passa pelos pontos P e Q em termos de suas coordenadas, verificando que a reta é única; para o segundo verifique que cada reta tem pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.)

Exercício 4: O plano da **Geometria Hiperbólica** é o conjunto $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. As linhas são de dois tipos: verticais $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$ ou arcos de circunferência $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$. Mostre que esta é uma geometria de incidência. (Verifique se valem os postulados: para o primeiro, ache a equação da linha que passa pelos pontos P e Q em termos de suas coordenadas, verificando que é única; separe em dois casos, $P = (a, b)$ e $Q = (a, c)$, mesma abscissa e $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ com $a \neq c$; para o segundo verifique que cada linha tem pelo menos dois pontos, dando exemplos particulares; dê exemplo de três pontos não colineares.)

Exercício 5: O **plano de Moulton** é o conjunto $\mathbb{R}^2$, com linhas das forma $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\}$ (verticais), ou $\ell_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$, com $m < 0$ (linhas retas de inclinações negativas) ou da forma $\ell^*_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y = 2mx + b$, se $x < 0$ e $y = mx + b$ se $x \geq 0\}$, com $m \geq 0$, (linhas quebradas e de inclinacoes positivas quando passam pelo eixo Oy). Mostre que esta também é geometria de incidência.

Exercício 6: O **plano "rasgado"** é o conjunto $\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x < 0$ ou $x \geq 1\}$ e suas linhas são da forma $\{(x, y) \in \pi : ax + by = c\}$. Mostre que esta é uma geometria de incidência.

---

3. Postulado da Régua - Exemplos

Agora vamos restringir mais nossas geometrias. Vamos impor que cada linha tem uma régua graduada, ou seja, a cada ponto da linha associaremos um número real (o número que aparece na régua, logo abaixo do ponto). Mais formalmente:

Postulado 4: (Postulado da Régua) Para cada linha ℓ, existe (pelo menos) uma função $f : \ell \to \mathbb{R}$ bijetora, chamada de régua de ℓ (ou seja, f é uma regra que associa a cada ponto P de ℓ um único número real $f(P)$ e, dado um número real $r \in \mathbb{R}$, existe um único ponto Q de ℓ associado a r, $f(Q) = r$.)

É como se as linhas fossem traçadas com uma régua graduada (talvez um pouco torta, dependendo da geometria). A ponta do lápis em cada instante estará em cima de um ponto de ℓ e o número que aparece na régua nesse lugar é o valor associado ao ponto.

Uma **Geometria Métrica** é uma geometria com régua graduada em que fizemos a escolha de uma régua para cada linha e usamos estas réguas para definir uma **distância** $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$, sendo f a régua escolhida para a linha $\overleftrightarrow{PQ}$.

IMPORTANTE: Daqui em diante, todas as geometrias consideradas serão métricas, ou seja, as réguas já foram previamente escolhidas e uma distância compatível determinada.

Exercício 7: Na geometria analítica, dada uma reta ℓ de equação $ax + by = c$, escolhemos dois pontos arbitrários $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ tais que $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 1$; qualquer outro ponto $R = (x, y)$ desta reta é determinado obtendo um número real t tal que $(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Neste caso, definimos $f(R)$ como o valor t obtido. No caso de $R = P$, temos que $t = 0$ e se $R = Q$, $t = 1$. Mostre que f é uma régua para ℓ.

Verifique que a distância entre os pontos $U = (u_1, v_1)$ e $V = (u_2, v_2)$ (definida a partir da régua) nesta geometria é $d(U, V) = d_E(U, V) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$.

Solução e/ou Sugestão: Primeiro vamos mostrar que para cada ponto (x_2, y_2) da reta $ax+by = c$ existe um único t tal que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Com isto, obtemos um sistema linear de duas equações a uma incógnita t

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)\, t &= x_2 - x_0 \\ (y_1 - y_0)\, t &= y_2 - y_0 \end{cases}$$

e precisamos mostrar que tem uma única solução. Como $P \neq Q$, então ou $x_1 \neq x_0$, ou $y_1 \neq y_0$. No primeiro caso, podemos isolar t da primeira equação, obtendo $t = (x_2 - x_0)/(x_1 - x_0)$. Daí, substituímos na segunda equação para ver se é um sistema possível de resolver; usando a equação da reta $ax + by = c$, como $x_1 \neq x_0$, a reta não pode ser vertical. Por isso, o coeficiente $b \neq 0$ e podemos isolar y em função de x, obtendo $y = (c - ax)/b$; assim temos que $y_2 = (c - ax_2)/b$ e $y_0 = (c - ax_0)/b$. Portanto, substituindo t na segunda equação, temos

$$(y_1 - y_0)t = (y_1 - y_0)\frac{(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = (x_2 - x_0)\frac{(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = -\frac{a}{b}(x_1 - x_0) = y_2 - y_0,$$

ou seja, o sistema é possível e determinado e portanto tem uma única solução. No caso em que $x_0 = x_1$, devemos ter que $y_0 \neq y_1$, e argumentamos de modo análogo.

Agora, dado $r \in \mathbb{R}$, precisamos mostrar que o ponto R de coordenadas $(x_3, y_3) = (x_0, y_0)+r(x_1-x_0, y_1 - y_0)$ está na reta $ax + by = c$, ou seja, $ax_3 + by_3 = c$. Substituindo x_3 por $x_0 + r(x_1 - x_0)$ e y_3 por $y_0 + r(y_1 - y_0)$, e usando o fato que P e Q estão nesta reta, temos

$$ax_3+by_3 = a[x_0+r(x_1-x_0)]+b[y_0+r(y_1-y_0)] = (1-r)(ax_0+by_0)+r(ax_1+by_1) = (1-r)c+rc = c,$$

ou seja, $R = (x_3, y_3)$ também está na reta.

Para verificar a fórmula da distância, sejam $r = f(U)$ e $s = f(V)$ os valores da régua correspondentes. Então $U = (u_1, v_1) = (x_0, y_0)+r(x_1-x_0, y_1-y_0)$ e $V = (v_1, v_2) = (x_0, y_0)+s(x_1-x_0, y_1-y_0)$ e $d(U, V) = |r-s|$. Subtraindo as duas equações, obtemos $(u_1-v_1, u_2-v_2) = (r-s)(x_1-x_0, y_1-y_0)$. Elevendo ao quadrado cada coordenada e somando as duas, temos $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = (r-s)^2[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2] = (r-s)^2$, pois escolhemos P e Q de modo que $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 = 1$; tirando as raízes quadradas, temos

$$d(U, V) = |r - s| = \sqrt{(r - s)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

que é o que queríamos mostrar.

Exercício 8: A **Geometria do Taxista** tem o plano e as linhas da geometria analítica mas com as réguas definidas por $f(P) = y$ se ℓ é uma reta vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P e $f(P) = (1 + |m|)x$ se ℓ for uma reta não vertical, de equação $y = mx + b$, e (x, y) forem as coordenadas de P. Verifique que nos dois casos f é realmente uma régua.

Verifique que $d(P, Q) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$ nesta geometria, sendo $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$.

Exercício 9: Na geometria hiperbólica, dada uma linha da forma $\ell_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$, defino $f(P) = |\ln(y)|$, sendo que (a, y) é a coordenada de P, e para uma linha da forma $\ell_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$, defino

$$f(P) = \left|\ln\left(\frac{x - p + r}{y}\right)\right|,$$

sendo (x, y) as coordenadas de P. Mostre que em ambos os casos f é uma régua. No caso de $\ell_{p,r}$, dado o número real t, o ponto P tal que $f(P) = t$ tem coordenadas (x, y) com $x = p + r \operatorname{tgh}(t)$ e $y = r \operatorname{sech}(t)$, sendo que

$$\operatorname{tgh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$

Verifique que a distância nesta geometria é dada por $d(P, Q) = |\ln(d/b)|$ se P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (a, d) (estão na mesma linha vertical) e por

$$d(P, Q) = \left|\ln\left(\frac{d(a - p + r)}{b(c - p + r)}\right)\right|,$$

se P tem coordenadas (a, b) e Q tem coordenadas (c, d), com $a \neq c$ (estão na mesma linha $\ell_{p,r}$).

Exercício 10: No plano de Moulton, definimos $f : \ell \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se ℓ é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P, f como na geometria analítica para $\ell_{m,b}$ com $m < 0$ e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1 + 4m^2} & \text{se } a < 0 \\ a\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a \geq 0, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a, b) e está na linha quebrada $\ell^*_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2mx + p$ se $x < 0$ e $y = mx + p$ se $x \geq 0\}$ (com $m \geq 0$). Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_E(P, (0, p)) + d_E((0, p), Q) & \text{se } ac < 0 \\ d_E(P, Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que a condição $ac < 0$ significa que os pontos P e Q estão em lados opostos do eixo Oy.

Exercício 11: No plano rasgado, definimos $f : \ell \to \mathbb{R}$ por $f(P) = y$ se ℓ é uma linha vertical (de equação $x = a$) e (a, y) são as coordenadas de P e por

$$f(P) = \begin{cases} a\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a < 0 \\ (a - 1)\sqrt{1 + m^2} & \text{se } a \geq 1, \end{cases}$$

sendo que P tem coordenadas (a, b) e está na linha quebrada $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + p$ e $x < 0$ ou $x \geq 1\}$. Verifique que f é régua e, neste caso, a distância entre $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é

$$d(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,(0,p)) + d_E((1,m+p),Q) & \text{se } a < 0 \text{ e } c \geq 1, \text{ ou } c < 0 \text{ e } a \geq 1 \\ d_E(P,Q) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que d_E é a distância da geometria analítica (ou euclideana). Observe que as condições $a < 0$ e $c \geq 1$, ou $c < 0$ e $a \geq 1$ significam que os pontos P e Q estão em lados opostos da faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\}$, retirada de $\mathbb{R}^2$.

---

4. Relação de Ordenação de Pontos: Numa geometria métrica, podemos estabelecer uma noção de ordem entre os pontos de cada linha, emprestada da régua correspondente. Sejam P, Q e R três pontos de uma linha ℓ e seja $f : \ell \to \mathbb{R}$ sua régua. Dizemos que $P - Q - R$ (Q **está entre** P e R) se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$.

Exercício 12: Mostre que numa geometria métrica, dada uma linha ℓ e sua régua $f : \ell \to \mathbb{R}$, então:

(a) se A é ponto de ℓ e $g, h : \ell \to \mathbb{R}$ são definidas por $g(P) = f(P) - f(A)$ e $h(P) = -f(P) + f(A)$, então g e h também são réguas de ℓ compatíveis com a distância;

(b) se $k : \ell \to \mathbb{R}$ é uma régua compatível com a distância, então existe um ponto A de ℓ tal que $k = g$ ou $k = h$ do item anterior;

(c) se $P - Q - R$ pela régua f então $P - Q - R$ por qualquer outra régua g de ℓ compatível com a distância.

Solução e/ou Sugestão:

(a) Temos que mostrar que se P e Q estão em ℓ, $d(P, Q) = |g(P) - g(Q)| = |h(P) - h(Q)|$. Sabemos que $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$. Com isto, temos $|g(P) - g(Q)| = |[f(P) - f(A)] - [f(Q) - f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$ e $|h(P) - h(Q)| = |[-f(P) + f(A)] - [-f(Q) + f(A)]| = |f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$, como queríamos mostrar.

(b) Seja A em ℓ tal que $k(A) = 0$. Então, para cada ponto P de ℓ, $d(A, P) = |k(P) - k(A)| = |k(P)| = |f(P) - f(A)|$. Tirando os módulos, ou $k(P) = f(P) - f(A) = g(P)$ ou $k(P) = -[f(P) - f(A)] = h(P)$, como queríamos mostrar.

(c) Suponhamos que $f(P) < f(Q) < f(R)$. Então, dado um ponto A de ℓ e subtraindo o número real $f(A)$ de cada termo, temos $f(P) - f(A) < f(Q) - f(A) < f(R) - f(A)$, ou seja $g(P) < g(Q) < g(R)$; se multiplicarmos por -1, invertemos as desigualdades, obtendo $-f(R) + f(A) < -f(Q) + f(A) < -f(P) + f(A)$, ou seja $h(R) < h(Q) < h(P)$. Em ambos os casos, permanece a relação $P - Q - R$, como queríamos mostrar.

Exercício 13: Dados A e B dois pontos distintos de uma linha ℓ, mostre que existe uma régua f de ℓ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$.

Exercício 14: Mostre que se P, Q e R são pontos distintos de uma linha ℓ, então:

(a) Se $P - Q - R$ então $R - Q - P$;

(b) Exatamente um dos casos ocorre: $P - Q - R$, ou $P - R - Q$, ou $Q - P - R$;

(c) se $P - Q - R$ e $Q - R - S$, então $P - Q - S$ e $P - R - S$;

(d) $P - Q - R$ se, e somente se, $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$.

Solução e/ou Sugestão:

(a) Se $P - Q - R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$ para a régua de ℓ. Mas isto também se aplica para $R - Q - P$.

(b) sendo os três pontos distintos, os valores $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ são distintos; estes admitem uma única ordem em $\mathbb{R}$; se $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, então nehuma das desigualdades restantes são possíveis: nem $f(Q) < f(R) < f(P)$, nem $f(P) < f(R) < f(Q)$, nem $f(R) < f(P) < f(Q)$ e nem $f(Q) < f(P) < f(R)$.

(c) se $P - Q - R$ e $f(P) < f(Q) < f(R)$, como $Q - R - S$, a única possibilidade é $f(Q) < f(R) < f(S)$ e portanto $f(P) < f(Q) < f(R) < f(S)$, donde decorre que $P - Q - S$ e $P - R - S$; se $f(R) < f(Q) < f(P)$, como $Q - R - S$, a única possibilidade é $f(S) < f(R) < f(Q)$ e portanto $f(S) < f(R) < f(Q) < f(P)$, donde novamente decorre que $P - Q - S$ e $P - R - S$.

(d) se $P - Q - R$, então $f(P) < f(Q) < f(R)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(P) < f(R) - f(P)$ e $0 < f(R) - f(Q)$, e $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(R) - f(P) = f(R) - f(Q) + f(Q) - f(P) = |f(R) - f(Q)| + |f(Q) - f(P)| = d(P, Q) + d(Q, R)$; ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, donde decorrem as desigualdades $0 < f(Q) - f(R) < f(P) - f(R)$ e $0 < f(P) - f(Q)$ e $d(P, R) = |f(P) - f(R)| = f(P) - f(R) = f(P) - f(Q) + f(Q) - f(R) = |f(P) - f(Q)| + |f(Q) - f(R)| = d(P, Q) + d(Q, R)$, como queríamos mostrar.

Para a recíproca, suponhamos que $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$. Como os três pontos são distintos, as únicas ordens comp-atíveis com tal fórmula são $f(P) < f(Q) < f(R)$ ou $f(R) < f(Q) < f(P)$, pois, por exemplo, se $f(R) < f(P) < f(Q)$, então $d(P, R) = f(P) - f(R) < f(Q) - f(R) = d(Q, R) < d(Q, R) + d(P, Q)$. (Verifique as outras possibilidades.)

Exercício 15: Mostre que dados dois pontos distintos A e B numa linha ℓ, existem pontos C, D e E de L tais que $C - A - D$ e $D - B - E$. (Use uma régua de ℓ para obter tais pontos.)

Exercício 16: Verifique que se $P = (-3, 3)$, $Q = (1, 5)$ e $R = (4, 4)$ estão em $\mathbb{H}$, então $P - Q - R$ na geometria hiperbólica.

Exercício 17: Verifique que se $P = (-1, -3)$, $Q = (0, -1)$ e $R = (1, 0)$ então $P - Q - R$ no plano de Moulton. (Ache $m > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que estes pontos estejam na linha $\ell^*_{m,b}$.)

Dados dois pontos distintos A e B, seja ℓ a linha que os contém. Definimos a **semi-reta** $\overrightarrow{AB}$ como sendo o conjunto $\{P \in \ell : \text{não vale } P - A - B\}$ e o **segmento** $\overline{AB}$ como o conjunto $\{P \in \ell : P = A, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - P - B\}$. Observe que $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : P = A, \text{ ou } A - P - B, \text{ ou } P = B, \text{ ou } A - B - P\}$.

Exercício 18: Mostre que se A e B são pontos distintos em uma linha ℓ, mostre que exite uma régua f de ℓ tal que $\overrightarrow{AB} = \{P \in \ell : f(P) \geq 0\}$.

Exercício 19: Mostre que se A e B são pontos distintos, então:

(a) $\overline{AB} = \overline{BA}$;

(b) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$;

(c) $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$;

(d) se $C \in \overrightarrow{AB}$ e $C \neq A$, então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$;

(e) se $C - A - B$ então $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC}$ é o ponto A.

Solução e/ou Sugestão:

(a) Observe que $A - P - B$ é o mesmo que $B - P - A$. Olhe para a definição de segmento.

(b) Mostre que existe um ponto C em $\overrightarrow{AB}$ mas não em $\overrightarrow{BA}$. Sabemos que existe C tal que $A - B - C$ (por quê?). Mostre que tal C serve.

(c) Escreva o que significa P estar em $\overline{AB}$ e o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

(d) Escreva o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e mostre que se está em uma, tem que estar na outra, e vice-versa.

(e) Novamente, escreva o que significa P estar em cada uma das semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

---

5. Congruência de Segmentos: Outra noção importante numa geometria métrica é a de **congruência de segmentos**: dizemos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$) se $d(A,B) = d(C,D)$.

Exercício 20: Mostre que $d(A,B) \geq 0$ e $d(A,B) = 0$ se, e só se, $A = B$.

Solução e/ou Sugestão: Seja f uma régua numa linha ℓ contendo A e B. Então $d(A,B) = |f(B) - f(A)| \geq 0$ (por definição de valor absoluto). Se $d(A,B) = 0$, então $f(A) = f(B)$ e, como f é uma função bijetora, isto implica que $A = B$. Reciprocamente, se $A = B$, então $f(A) = f(B)$ e, portanto $d(A,B) = 0$.

Exercício 21: Mostre que $\equiv$ é uma **relação de equivalência**, ou seja, mostre que valem as três propriedades que a caracterizam:

(a) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$;

(b) se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$;

(c) se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

Solução e/ou Sugestão: Use a definição de $\equiv$ e as propriedades da igualdade.

Exercício 22: Mostre que se A e B são dois pontos distintos, então existe um único ponto C tal que $A - C - B$ e $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$ (isto é, C é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Solução e/ou Sugestão: Basta tomar uma régua f tal que $f(A) < f(B)$ e tomar o ponto C na linha $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $f(C) = (f(A) + f(B))/2$. (Por quê existe tal f e tal ponto C?)

Exercício 23: Mostre que se A e B são dois pontos distintos, então existem pontos C, D e E tais que $A - C - D$, $D - E - B$, e $\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EB}$.

Exercício 24: Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então exite um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$.

Exercício 25: Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então exitem exatamente dois pontos P e Q em $\overleftrightarrow{AB}$ tais que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AQ} \equiv \overline{CD}$. (Nos dois lados de A.)

Exercício 26: Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, então:

(a) (Soma de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $A - B - P$ e $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a soma do segmento $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.)

(b) (Diferença de segmentos) exite um único ponto P em $\overrightarrow{BA}$ tal $\overline{BP} \equiv \overline{CD}$. (Podemos dizer que $\overline{AP}$ é a diferença entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.)

(c) Mostre que dados A e B distintos e um segmento $\overline{CD}$, exite uma régua f de $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $f(A) = 0$, $f(B) > 0$ e $f(P) = f(B) + d(C, D)$, no caso da soma dos segmentos e $f(P) = f(B) - d(C, D)$, no caso da diferença dos segmentos.

Solução e/ou Sugestão: Ache primeiro a régua f tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$ (exercício anterior) e mostre que os pontos P tais que $f(P) = f(B) + d(C, D)$ ou $f(P) = f(B) - d(C, D)$ resolvem o problema.

Dados três pontos não colineares A, B e C, definimos o **ângulo** $\angle ABC$ como o conjunto $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$. O ponto B é o **vértice** do ângulo.

Exercício 27: Dados três pontos não colineares A, B e C, mostre que

(a) $\angle ABC = \angle CBA$;

(b) $\angle ACB \neq \angle ABC$ e $\angle BAC \neq \angle ABC$;

(c) se P está em $\overrightarrow{BA}$, $P \neq B$ e Q em $\overrightarrow{BC}$, $Q \neq B$, então $\angle ABC = \angle PBQ$.

Solução e/ou Sugestão:

(a) $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA} = \angle CAB$;

(b) $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = \angle BAC$, etc.

(c) decorrem do fato que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ}$.

---

6. Postulado de Separação do plano: Vamos introduzir agora mais um postulado que restringirá mais as geometrias permitidas. Para isto precisamos definir alguns conceitos.

Um conjunto A do plano é **convexo** se, para todos os pares de pontos P e Q em A, o segmento $\overline{PQ}$ está todo contido em A.

Exercício 28: Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Solução e/ou Sugestão: Sejam A e B convexos. Para mostrar que $A \cap B$ é convexo, precisamos tomar dois pontos arbitrários P e Q na interseção $A \cap B$ e mostrar que todos os pontos do segmento $\overline{PQ}$ etsão nesta interseção.

Se $P, Q \in A \cap B$, então $P, Q \in A$ e, portanto, todos os pontos de $\overline{PQ}$ estão em A; mas $P, Q \in B$ também, portanto todos os pontos do segmento $\overline{PQ}$ estão em B. Portanto $\overline{PQ}$ está contido em $A \cap B$.

Exercício 29: Mostre que são conjuntos convexos:

(a) o plano todo e o conjunto vazio;

(b) uma linha ℓ;

(c) uma semi reta $\overrightarrow{AB}$;

(d) uma semi reta $\overrightarrow{AB}$ menos seu vértice A;

(e) um segmento $\overline{AB}$;

(f) o interior do segmento $\overline{AB}$ (isto é, o segmento menos os pontos A e B).

Postulado 5: (Postulado de Separação do plano) Dada uma linha ℓ, existem conjuntos H_1 e H_2 (chamados de **lados de** ℓ) tais que:

(a) H_1 e H_2 são convexos;

(b) $H_1 \cap \ell = \varnothing$, $H_2 \cap \ell = \varnothing$ e $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ e cada ponto do plano está em H_1, ou em H_2 ou em ℓ;

(c) se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ então o segmento $\overline{PQ}$ intersecta a linha ℓ num ponto R.

Exercício 30: Mostre que numa geometria métrica satisfazendo o postulado da separação do plano os conjuntos H_1 e H_2 não são vazios.

Solução e/ou Sugestão: Observe que o postulado não garante que H_1 e H_2 não sejam vazios; o item (c) apenas diz que se existirem pontos $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ então etc. Para mostrarmos que existem tais pontos precisamos apelar para o postulado 3, que diz que existem pelo menos três pontos não colineares. Isto implica que deve existir pelo menos um ponto A fora de ℓ. Então A deve estar em H_1 ou H_2. Digamos que esteja em H_1. Precisamos mostrar que existe pelo menos um ponto em H_2. Para isto, seja $B \in \ell$ um ponto qualquer e seja $C \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $A - B - C$ (tal ponto existe pelo postulado da régua). Como $A \notin \ell$, $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$ e portanto $C \notin \ell$. Como o segmento $\overline{AC}$ encontra ℓ no ponto B e sendo H_1 convexo, $C \notin H_1$. Portanto $C \in H_2$, ou seja $H_2 \neq \varnothing$.

Exercício 31: Mostre que nas geometrias analítica, hiperbólica, do taxista e do plano de Moulton vale o postulado da separação do plano.

Solução e/ou Sugestão: Para cada uma delas, dada uma linha ℓ, verifique que ela separa o plano em dois conjuntos H_1 e H_2; mostre que estes conjuntos são convexos; mostre que vale sempre o item (c).

Este postulado tem conseqüências importantes. Para expô-las, definiremos algumas **figuras geométricas**. Um triângulo é um conjunto $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$, a união de três segmentos determinados por três pontos A, B e C não colineares, chamados de **vértices**. Cada segmento $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é um **lado** do triângulo. Um **quadrilátero** é um conjunto $\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, a união dos quatro segmentos determinados pelos pontos A, B, C e D (seus **vértices**), três a três não colineares. Cada segmento $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é um **lado** do quadrilátero e os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas **diagonais**. Mais geralmente, um **polígono** $A_1A_2\ldots A_n = \overline{A_1A_2} \cup \ldots \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$, e cada um destes segmentos é um de seus lados e cada ponto A_i $(1 \leq i \leq n)$ seu **vértice**.

Exercício 32: Mostre que $\triangle ABC = \triangle ACB$ e que $\square ABCD \neq \square ACBD$, ou seja, se o polígono tem mais de três vértices, a ordem destes vértices é importante ao escrever $A_1A_2\ldots A_n$.

Exercício 33: Mostre que se vale o postulado da separação do plano:

(a) dado o $\triangle ABC$, se ℓ é uma linha que intersecta o lado $\overline{AB}$, mas $A \notin \ell$ e $B \notin \ell$, então ℓ intersecta (pelo menos) um dos outros dois lados;

(b) dado o $\triangle ABC$, se ℓ é uma linha que intersecta o lado $\overline{AB}$, $A \notin \ell$, $B \notin \ell$, $C \notin \ell$ e ℓ intersecta $\overline{AC}$ então ℓ não intersecta $\overline{BC}$.

Solução e/ou Sugestão:

(a) Sejam H_1 e H_2 os lados de ℓ. Como o segmento $\overline{AB}$ intersecta ℓ e $A, B \notin \ell$, então A e B estão em lados opostos de ℓ. Podemos ter três situações: ou $C \in \ell$ e, neste caso $\overline{AC}$ intersecta ℓ, ou A e C estão em lados opostos de ℓ e, também neste caso ℓ intersecta $\overline{AC}$, ou A e C estão do mesmo lado de ℓ e, portanto B e C estão em lados opostos de ℓ e, portanto, ℓ intersecta o lado $\overline{BC}$.

(b) Suponhamos que ℓ intersecte os três lados do $\triangle ABC$, sem passar pelos seus vértices. Sejam $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{AC}$ e $R \in \overline{BC}$ os pontos de interseção de ℓ com o $\triangle ABC$. Podemos ter três casos, $P-Q-R$, ou $P-R-Q$, ou $Q-P-R$. Vamos apenas considerar o caso em que $P-Q-R$, deixando os outros como exercício. Então os pontos A, P e R estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, pois, sa A e P estivessem de lados opostos, o segmento $\overline{AP}$ encontraria $\overleftrightarrow{BC}$ e o único ponto em que isto ocorreria só pode ser B. Mas isto implicaria que $A - B - P$, contradizendo o fato de que $P \in \overline{AB}$. O mesmo tipo de raciocínio garante que R e A também não podem estar em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$. Como cada lado de $\overleftrightarrow{BC}$ é convexo e P e R estão do mesmo lado, o segmento $\overline{PR}$ não poderia encontrar a linha $\overleftrightarrow{BC}$ no ponto Q. Esta contradição termina a prova.

Exercício 34: Mostre que a geometria do plano rasgado não vale o postulado da separação do plano.

Solução e/ou Sugestão: Use o exercício anterior, obtendo um triângulo $\triangle ABC$ e uma linha ℓ que não intersecta seus vértices, mas intersecta apenas um de seus lados.

Exercício 35: Sem assumir o postulado da separação do plano, mostre que **são equivalentes:**

(a) O **postulado da separação do plano**;

(b) O **Postulado de Pasch:** Dados uma linha ℓ e um triângulo $\triangle ABC$, se $D \in \ell$ é um ponto tal que $A - D - B$, então ou ℓ intersecta $\overline{AC}$ ou ℓ intersecta $\overline{BC}$.

Solução e/ou Sugestão: Já provamos que (a) implica (b). Vamos mostrar que (b) implica (a). Alguns detalhes serão deixados aos leitores.

Suponha (b). Seja $P \notin \ell$ (que existe pelo postulado 3) e definimos $H_1 = \{Q : Q = P$ ou $\overline{PQ} \cap \ell = \varnothing\}$ e $H_2 = \{Q : Q \notin \ell$ e $\overline{PQ} \cap \ell \neq \varnothing\}$. Então $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap \ell = H_2 \cap \ell = \varnothing$, e todo ponto do plano ou está em ℓ ou em H_1 ou em H_2. Falta mostrar que H_1 e H_2 são convexos e que dados $A \in H_1$ e $B \in H_2$, o segmento $\overline{AB}$ intersecta ℓ.

Vamos mostrar que H_1 é convexo. Para isto, sejam $A, B \in H_1$, $A \neq B$, e suponhamos que $A \neq P$ e $B \neq P$ (os casos em que $A = P$ ou $B = P$ ficam para os leitores). Queremos mostrar que todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1. Se A, B e P estão numa mesma linha $\overleftrightarrow{AB}$, então ou $A - B - P$ ou $A - P - B$ ou $B - A - P$. Mostre que em nenhum destes casos, $\overline{AB}$ pode ter ponto nem de H_2 e nem de ℓ. Se A, B e P não são colineares, seja $D \in \overline{AB}$ tal que $A - D - B$. Sabemos que ℓ não intersecta nem $\overline{AP}$ e nem $\overline{BP}$ (por quê?). Se $D \in \ell$ então ℓ intersectaria $\overline{AB}$, e por Pasch, deveria intersectar $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$. Portanto $D \notin \ell$. Se $D \in H_2$, então ℓ intersecta $\overline{DP}$. Por Pasch, aplicado aos triângulos $\triangle ADP$ e $\triangle BDP$, teríamos que ℓ intersectaria $\overline{AP}$ ou $\overline{BP}$ (por quê?), uma contradição. Portanto, todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_1.

Vamos mostrar agora que H_2 é convexo. Para isto, sejam $A, B \in H_2$, $A \neq B$. Precisamos mostrar que todos os pontos de $\overline{AB}$ estão em H_2. Novamente temos dois casos, a saber, A, B e P são colineares. Então ou $A - B - P$ ou $B - A - P$. (Mostre que não pode ocorrer $A - P - B$.) Se $A - B - P$, pela definição de H_2 existe um ponto $R \in \ell \cap \overline{BP}$, tal que $B - R - P$. Como $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BP}$, o único ponto de encontro de ℓ com $\overleftrightarrow{AB}$ é R. Como $A - B - R$, os pontos de $\overline{AB}$ estão todos em H_2 (por quê?). Suponhamos agora que A, B e P sejam não colineares. Consideremos o triângulo $\triangle ABP$. Pela definição de H_2, ℓ intersecta ambos os lados $\overline{AP}$, no ponto R e $\overline{BP}$, no ponto S. Vamos mostrar que nenhum ponto de $\overline{AB}$ pode estar em ℓ. Seja $T \in \overline{AB}$, $A - T - B$. Se $T \in \ell$, podemos ter $R - S - T$, $R - T - S$ ou $S - R - T$. Vamos considerar o caso $R - S - T$, deixando os outros dois para os leitores. Consideremos o $\triangle ART$, com a linha $\overleftrightarrow{BP}$; temos que $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AT} = \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BP} \neq \overleftrightarrow{AR} = \overleftrightarrow{AP}$ (pois A, B e P não são colineares); portanto $\overleftrightarrow{BP}$ não encontra nem $\overline{AR}$ e nem $\overline{AT}$ (por quê?); como encontra $\overline{RT}$ no ponto S, temos uma contradição ao postulado de Pasch. Aplicando Pasch aos triângulos $\triangle ATP$ e $\triangle TBP$, temos que $\overline{TP}$ intersecta ℓ (por quê?) e, portanto $T \in H_2$, pela definição de H_2. Portanto H_2 é convexo.

Agora sejam $A \in H_1$ e $B \in H_2$. Precisamos mostrar que $\overline{AB}$ intersecta ℓ num ponto R. Se $A = P$, pela definição de H_2, $\overline{AB} = \overline{PB}$ intersecta ℓ. Se A, B e P não são colineares, como $\overline{BP}$ intersecta ℓ e $\overline{AP}$ não intersecta ℓ (por quê?), por Pasch no triângulo $\triangle ABP$, $\overline{AB}$ intersecta ℓ num ponto R, como queríamos. Se A, B e P são colineares, como $\overline{BP}$ intersecta ℓ (pela definição de H_2), seja R este ponto em comum. Temos que $B - R - P$ e, como $A \in \overleftrightarrow{BP}$, $A \in H_1$, $A \neq P$, $A \neq R$ e $A \neq B$, temos que, ou $P - R - A$ (que não pode ocorrer, pois $A \in H_1$, que é convexo), ou $P - A - R$, ou $A - P - R$, o que implica que $\overline{AB}$ encontra ℓ em R, como queríamos.

Importante: Daqui em diante assumimos que as geometrias consideradas são geometrias métricas que satisfazem o postulado da separação do plano. Estas geometrias são chamadas de **Geometrias de Pasch**.

Exercício 36: Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e E, tais que $B - C - D$ e $A - E - C$, mostre que exite um ponto $F \in \overleftrightarrow{DE}$, tal que $A - F - B$ e $D - E - F$.

Exercício 37: Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e F, tais que $B - C - D$ e $A - F - B$, mostre que exite um ponto $E \in \overleftrightarrow{DF}$, tal que $A - E - C$ e $D - E - F$.

Exercício 38: Dado o $\triangle ABC$ e pontos D e E, tais que $B - E - C$ e $A - D - B$, mostre que $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ se intersectam.

---

7. Interiores e o Teorema das Barras Cruzadas:

O resultado mais útil que é uma conseqüência do postulado da separação do plano é o chamado Teorema das Barras Cruzadas. Ele permite provar que diagonais de quadriláteros, ou duas medianas de um triângulo, etc, se intersectam. Para prová-lo, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares.

Definimos o **interior de uma semi reta** $\overrightarrow{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{AB})$ dos pontos $P \in \overrightarrow{AB}$ tais que $P \neq A$ (a semi reta menos o vértice); **interior de um segmento** $\overline{AB}$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\overline{AB})$ dos pontos $P \in \overline{AB}$ tais que $P \neq A$ e $P \neq B$; e o **interior do ângulo** $\angle AOB$ como o conjunto $\mathsf{int}\,(\angle AOB)$ obtido pela interseção $H_1 \cap \overline{H}_1$, sendo H_1 o lado de $\overleftrightarrow{OB}$ contendo A e $\overline{H}_1$ o lado de $\overleftrightarrow{OA}$ contendo B.

Exercício 39: Mostre que se $\angle AOB = \angle CPD$ então $O = P$ e $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PC}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PD}$, ou $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PD}$ e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$. Mostre também que, se $\mathsf{int}\,(\angle AOB) = \mathsf{int}\,(\angle CPD)$, então $\angle AOB = \angle CPD$.

Exercício 40: Mostre que se $\angle AOB = \angle CPD$ então o $\mathsf{int}\,(\angle AOB) = \mathsf{int}\,(\angle CPD)$.

Exercício 41: Seja W um conjunto não vazio e convexo do plano e ℓ uma linha não encontrando W. Mostre que todos os pontos de W estão do mesmo lado de ℓ.

Exercício 42: Mostre que, dados $A \in \ell$ e $B \notin \ell$ dois pontos, então todos os pontos de $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{AB})$ estão do mesmo lado de ℓ.

Exercício 43: Dados $A \neq B$, C e D em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que $\overrightarrow{AC}$ não intersecta $\overrightarrow{BD}$.

Solução e/ou Sugestão: Todos os pontos do interior de $\overrightarrow{AC}$ estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C (por quê?); todos os pontos ponto do interior de $\overrightarrow{BD}$ estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que D (por quê?), que é oposto a C. Portanto as semi retas não se encontram (por quê?).

Exercício 44: Mostre que $P \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$ se, e somente se, A e P estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OB}$ e P e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{OA}$.

Exercício 45: Dado o $\triangle ABC$, mostre que se $A - P - C$, então $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ e $\mathsf{int}\,(\overline{AB})$ está contido em $\mathsf{int}\,(\angle ABC)$.

Exercício 46: (O Teorema das Barras Cruzadas) Se $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ então $\overrightarrow{BP}$ intersecta $\overline{AC}$ num único ponto F com $A - F - C$.

Solução e/ou Sugestão: Seja E tal que $E - B - C$ (tal ponto existe pelo postulado da régua). A linha $\overleftrightarrow{BP}$ cruza o lado $\overline{EC}$ do triângulo $\triangle ACE$ pelo ponto B. Portanto deve cruzar outro lado deste triângulo. Os interiores das semi retas $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{AE}$ estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$, portanto não se encontram. Seja Q um ponto tal que $P - B - Q$. Então A e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{EC}$ (por quê?). Portanto as semi-retas $\overrightarrow{BQ}$ e $\overrightarrow{EA}$ não se encontram. Isto é, a linha $\overleftrightarrow{BP}$ não intersecta o segmento $\overline{AE} = \overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{EA}$. Portanto existe um único ponto $F \in \overline{AC} \cap \overleftrightarrow{BP}$. Temos que $F \neq A$, pois $\overleftrightarrow{BP}$ não intersecta $\overline{AB}$ e $F \neq C$, pois B, P e C não são colineares (por quê isto implica que $F \neq C$?). Portanto $A - F - C$. Só falta mostrar que $F \in \overrightarrow{BP}$. Mas isto decorre do fato que P e Q estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ e A e P estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ (por quê?).

O **interior do triângulo** $\triangle ABC$ é o conjunto $\mathsf{int}\,(\triangle ABC) = H_1 \cap \overline{H}_1 \cap \tilde{H}_1$, sendo que H_1 é o lado de $\overleftrightarrow{BC}$ contendo A, $\overline{H}_1$ é o lado de $\overleftrightarrow{AC}$ contendo B e $\tilde{H}_1$ é o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ contendo C. Um quadrilátero $\square ABCD$ é um **quadrilátero convexo** se A e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{CD}$, B e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AD}$, C e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ e A e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Um **polígono convexo** é definido de modo análogo (todos os outros vértices deverão estar do mesmo lado de $\overleftrightarrow{A_iA_j}$, se $1 \leq i < j = i + 1 \leq n$ ou $i = n$ e $j = 1$).

Exercício 47: Dados $\triangle ABC$ e pontos D, E e F, tais que $B - C - D$, $A - E - C$ e $B - E - F$, mostre que $F \in \mathsf{int}\,(\angle ACD)$.

Exercício 48: Mostre que se $A - D - B$ e C e E estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, então ou $\overrightarrow{DE} \cap \overline{AC} \neq \varnothing$, ou $\overrightarrow{DE} \cap \overline{BC} \neq \varnothing$.

Exercício 49: Dados $\angle ABC$ e um ponto P, mostre que se $\overrightarrow{BP} \cap \mathsf{int}\,(\overline{AC}) \neq \varnothing$, então $P \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$. (Uma recíproca das Barras Cruzadas.)

Exercício 50: Mostre que se $\ell \cap \mathsf{int}\,(\triangle ABC) \neq \varnothing$ então ℓ encontra $\triangle ABC$ em exatamente dois pontos.

Exercício 51: Mostre que um quadrilátero $\square ABCD$ é convexo se, e somente se, cada vértice está no interior do ângulo oposto. (Por exemplo, A está no interior de $\angle BCD$, etc.)

Exercício 52: Mostre que as diagonais de um quadrilátero convexo se intersectam.

Exercício 53: Prove a recíproca, ou seja, se as diagonais de um quadrilátero se intersectam então ele é convexo.

---

8. MEDIDA DE ÂNGULO:

Agora vamos introduzir mais um instrumento de medidas, o **transferidor**, que mede ângulos. Isto será feito através de um postulado dizendo como ele funciona.

Postulado 6: (Postulado do Transferidor) Existe um número real positivo r_0 e uma função m que a cada ângulo $\angle ABC$ associa um número real $m(\angle ABC)$, tal que

(a) $0 < m(\angle ABC) < r_0$;

(b) se $D \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$, então $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$;

(c) se H_1 é um lado de $\overleftrightarrow{BC}$ e x é um número real tal que $0 < x < r_0$, então existe um ponto A em H_1 tal que $m(\angle ABC) = x$ e se $P \in H_1$ também satisfaz $m(\angle PBC) = x$, então $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$ (ou seja, $\angle ABC = \angle PBC$).

O número r_0 vai depender de que medida de ângulo estamos usando. Por exemplo, na geometria analítica, r_0 pode ser 180 (se medirmos em graus) ou π (se medirmos em radianos), ou qualquer outro valor que nos aprouver. Neste texto, vamos usar a medida em graus.

Exercício 54: Na geometria analítica, sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ não colineares. Definimos $m(\angle ABC)$ como o arco α entre 0 e 180 que tem cosseno

$$\cos\alpha = \frac{(A-B)\cdot(C-B)}{|A-B|\cdot|C-B|} = \frac{(a_1-b_1)(c_1-b_1)+(a_2-b_2)(c_2-b_2)}{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}$$

Mostre que m é medida de ângulo. (Tem que satisfazer as três condições. Se necessário, consulte um livro de Vetores e Geometria.)

Exercício 55: Na geometria do taxista, mostre que a medida m da geometria analítica é medida de ângulo.

Exercício 56: Na geometria hiperbólica, dados $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, se $a = c$, P e Q estão na linha ℓ_a; neste caso, definimos o vetor $v_{PQ} = (Q - P)/|P - Q| = (0, \pm 1)$ para a semi reta $\overrightarrow{PQ}$, sendo $|P - Q| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} = |d - b|$; se $a \neq c$ então P e Q estão numa linha $\ell_{p,r}$; esta linha consiste nos pontos (x, y) que satisfazem $x = p + r\,\text{tgh}\ t$ e $y = r\,\text{sech}\ t$, para algum t; nesta linha temos a régua f que associa ao ponto de coordenadas (x, y) o valor t; seja $t_0 = f(P)$; mostre que neste caso, a semi reta $\overrightarrow{PQ}$ é o conjunto $\{R \in \ell_{p,r} : f(R) \geq f(P)\}$, se $f(Q) > f(P)$ e, neste caso, definimos o vetor $v_{PQ} = u$, ou o conjunto $\{R \in \ell_{p,r} : f(R) \leq f(P)\}$ e, neste caso, definimos o vetor $v_{PQ} = -u$, sendo que

$$u = \left(\frac{\text{sech}\ t_0}{\sqrt{(\text{sech}\ t_0)^2 + (\text{tgh}\ t_0)^2}}, -\frac{\text{tgh}\ t_0}{\sqrt{(\text{sech}\ t_0)^2 + (\text{tgh}\ t_0)^2}} \right)$$

lembrando que $t_0 = f(P)$.

Agora, dados A, B e C não colineares, definimos a medida de $m(\angle ABC)$ como sendo o arco α entre 0 e 180 (graus) cujo cosseno seja $v_{BA} \cdot v_{BC}$ (produto escalar). Mostre que esta medida satisfaz as três condições.

Solução e/ou Sugestão: Todo este trabalho em definir os vetores v_{PQ} foi para introduzir a medida do ângulo $\angle ABC$ como a medida entre as retas tangentes às linhas correspondentes, com os vetores apontando na direção das semi retas. O item (a) é fácil. Os itens (b) e (c) exigem mais trabalho. (Se necessário, consulte um livro de Vetores e Geometria.)

Outro modo de obter o vetor v_{PQ} no caso em que $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ estão numa linha $\ell_{p,r}$, é definir um vetor auxiliar $u_{PQ} = (b, p - a)$, que é perpendicular ao vetor $P - (b, 0) = (a - p, b)$ (o raio de $\ell_{p,r}$, partindo do centro $(p, 0)$ e chegando no ponto P) e tomar $v_{PQ} = u_{PQ}/|u_{PQ}|$ se $c > a$ (Q está à direita de P), ou $v_{PQ} = -u_{PQ}/|u_{PQ}|$ se $c < a$ (Q está à esquerda de P).

Exercício 57: No plano de Moulton, definimos $m(\angle ABC)$ como sendo a medida da geometria analítica de $\angle PBQ$, se B não está no eixo Oy e P e Q estão no mesmo lado que B em relação ao eixo Oy; se B está no eixo Oy, dados $b \in \mathbb{R}$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto, definimos o ponto P_b por

$$P_b = \begin{cases} (x, 2y - b) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > b, \\ (x, y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos então $m(\angle ABC) = m_E(\angle A_b B C_b)$, sendo m_E a medida euclideana de ângulo. Observe que nesta medida de ângulo nós "desentortamos" as linhas $l^*_{m,b}$ que suportam as semi retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ que definem o ângulo $\angle ABC$. Verifique que esta medida satisfaz os três itens do postulado.

---

9. Congruência de Ângulos e Perpendiculares:

Tendo uma medida de ângulos, podemos comparar ângulos.

Dizemos que $\angle ACB \equiv \angle DEF$ (o ângulo $\angle ABC$ é **congruente** ao ângulo $\angle DEF$) se $m(\angle ACB) = m(\angle DEF)$. Dados $A - B - D$ e C fora da linha $\overleftrightarrow{AB}$, dizemos que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBC$ são **suplementares**.

Exercício 58: Sejam C e D dois pontos do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, com $A \neq B$; mostre que $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$ se, e somente se, $C \in \mathsf{int}\,(\angle ABD)$.

Solução e/ou Sugestão: Suponha que $C \in \operatorname{int}(\angle ABD)$; então, pelo postulado, $m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = m(\angle ABD)$ e, como $m(\angle DBC) > 0$, $m(\angle ABC) < m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = m(\angle ABD)$.

Se $C \notin \operatorname{int}(\angle ABD)$, ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ e, neste caso, $m(\angle ABC) = m(\angle ABD)$, pois $\angle ABC = \angle ABD$, ou $D \in \operatorname{int}(\angle ABC)$ e, neste caso, $m(\angle ABD) < m(\angle ABC)$. Portanto, se $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$, então $C \in \operatorname{int}(\angle ABD)$.

Exercício 59: Dados $A - B - D$ e C fora de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$ (ou seja, a soma das medidas de ângulos suplementares é o número r_0 do postulado, o que neste caso é 180).

Solução e/ou Sugestão: Sejam H_1 o lado de $\overleftrightarrow{AB}$ contendo C, $\alpha = m(\angle ABC)$ e $\beta = m(\angle CBD)$. Temos que mostrar que $\alpha + \beta = 180$. Para isto, vamos mostrar que tanto $\alpha + \beta < 180$ quanto $\alpha + \beta > 180$ implicam uma contradição.

Se $\alpha + \beta < 180$, então existe uma única semi reta $\overrightarrow{BE}$, cujo interior está em H_1, tal que $m(\angle ABE) = \alpha + \beta$. Como $\alpha < \alpha + \beta$, $C \in \operatorname{int}(\angle ABE)$. Como $m(\angle ABC) + m(\angle EBC) = m(\angle ABE)$, $m(\angle EBC) = \beta$. Como $E \in \operatorname{int}(\angle DBC)$ (por quê?), $m(\angle DBE) + m(\angle EBC) = m(\angle DBC)$, ou seja, $m(\angle DBE) + \beta = \beta$, o que implica que $m(\angle DBE) = 0$, contradizendo o item (a) do postulado do transferidor. Portanto $\alpha + \beta \geq 180$.

Agora suponha que $\alpha+\beta > 180$. Como $\alpha, \beta < 180$, temos que $\alpha+\beta < 360$. Daí, se $\gamma = \alpha+\beta-180$, então $0 < \gamma < 180$. Pelo postulado do transferidor, existe $E \in H_1$ tal que $m(\angle ABE) = \gamma$. Como $\beta < 180$, temos que $\beta - 180 < 0$ e, portanto, $\gamma = \alpha + \beta - 180 < \alpha$. Portanto $E \in \operatorname{int}(\angle ABC)$. Mas $\alpha = m(\angle ABC) = m(\angle ABE)+m(\angle EBC) = \gamma+m(\angle EBC)$, portanto $m(\angle EBC) = \alpha-\gamma = \alpha-(\alpha+\beta-180) = 180-\beta$, o que implica que $m(\angle DBE) = m(\angle DBC)+m(\angle EBC) = \beta+(180-\beta) = 180$, o que contradiz o item (a) do postulado do transferidor.

Portanto $\alpha + \beta = 180$.

Observação: Como conseqüência disto temos que "ângulos opostos pelo vértice são congruentes", ou seja, se $A-B-D$, $E-B-C$ e A, B e C não são colineares, então $m(\angle ABC) = m(\angle DBE)$, pois $m(\angle ABC)+m(\angle DBC) = 180 = m(\angle DBC)+m(\angle EBC)$ e, portanto, $m(\angle ABC) = m(\angle EBD)$.

O caso em que $m(\angle ABC) = 90$ é muito interessante, pois todos os quatro ângulos formados assim são congruentes (todos medem 90). Neste caso, dizemos que as linhas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são **perpendiculares** , que a semi reta $\overrightarrow{BC}$, ou mesmo o segmento $\overline{BC}$, é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e chamamos o ponto B de **pé da perpendicular**; nestes casos, denotamos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, etc.

Exercício 60: Mostre que, se $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = m(\angle ABD)$, então $C \in \operatorname{int}(\angle ABD)$.

Solução e/ou Sugestão: Mostre primeiro que C e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, mostrando que não podem estar em $\overleftrightarrow{AB}$ e nem em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ (para este caso, considere as possibilidades A e D do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ e em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$).

Exercício 61: Mostre que, se A e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ e $m(\angle ABC)+m(\angle CBD)=180$, então $A-B-D$. (Ou seja, mostre que neste caso os ângulos são suplementares.)

Exercício 62: Na geometria hiperbólica, dada a linha $\ell_{0,5}=\{(x,y)\in\mathbb{H} : x^2+y^2=25\}$ e o ponto $B=(3,4)\in\ell_{0,5}$, ache a linha ℓ contendo B e perpendicular à linha $\ell_{0,5}$.

Solução e/ou Sugestão: A resposta é a linha $\ell_{p,r}$, com $p=25/3$ e $r=20/3$.

---

10. O Postulado LAL: Até então não temos nenhuma relação entre as várias réguas e transferidores de nossa geometria. Vamos agora fazer isto por meio do postulado LAL (o conhecido critério de "congruência de triângulos" *Lado-Ângulo-Lado*). Para isto precisamos definir certos conceitos.

Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares (A,B,C) e (D,E,F), dizemos que a correspondência $A\mapsto D$, $B\mapsto E$, $C\mapsto F$ é uma **congruência de triângulos** entre $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ (aqui a ordem em que aparecem os pontos é importante), se $\overline{AB}\equiv\overline{DE}$, $\overline{AC}\equiv\overline{DF}$, $\overline{BC}\equiv\overline{EF}$, $\angle BAC\equiv\angle EDF$, $\angle ABC\equiv\angle DEF$ e $\angle ACB\equiv\angle DFE$. Denotamos este conceito por $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ e insistimos que dizer $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ é *diferente* de dizer $\triangle ACB\equiv\triangle DEF$.

Postulado 7: (LAL) Dadas duas triplas ordenadas de pontos não colineares (A,B,C) e (D,E,F), se $\overline{AB}\equiv\overline{DE}$, $\overline{AC}\equiv\overline{DF}$ e $\angle BAC\equiv\angle EDF$, então $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$.

Exercício 63: Mostre que a geometria analítica satisfaz o postulado LAL.

Solução e/ou Sugestão: Defina os vetores $u_1=B-A$, $v_1=C-A$, $u_2=E-D$, $v_2=F-D$, $w_1=u_1-v_1=B-C$ e $w_2=u_2-v_2=E-F$. Relembremos o produto escalar $u\cdot v=|u|\,|v|\cos\alpha$, sendo α o ângulo entre os vetores. A hipótese do LAL implica que $|u_1|=|u_2|$, $|v_1|=|v_2|$ e $u_1\cdot v_1=u_2\cdot v_2$. Então $|w_2|^2=w_2\cdot w_2=(u_2-v_2)\cdot(u_2-v_2)=u_2\cdot u_2-u_2\cdot v_2-v_2\cdot u_2+v_2\cdot v_2=|u_2|^2-2\,u_2\cdot v_2+|v_2|^2=|u_1|^2-2\,u_1\cdot v_1+|v_1|^2=|w_1|^2$, ou seja, $\overline{BC}\equiv\overline{EF}$. Para as congruências $\angle ABC\equiv\angle DEF$ e $\angle ACB\equiv\angle DFE$, basta então verificar que $u_1\cdot w_1=u_2\cdot w_2$ e $v_1\cdot w_1=v_2\cdot w_2$ (por quê?), o que é uma conta simples.

Observação: É possível, mas bem trabalhoso, mostrar que a geometria hiperbólica também satisfaz o postulado LAL. Para isto, precisamos fazer as contas do exercício a seguir. Isto é um **tópico opcional** (ou seja, não cai na prova!).

Para fazer isto, identificamos cada par $(x,y)\in\mathbb{H}$ com o número complexo $z=x+iy$ (sendo $i=\sqrt{-1}$). Dada uma matriz

$$M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

com $ad-bc\neq 0$ e um número complexo $z=x+iy$, definimos as transformações

$$w=\varphi_M(z)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} z=\frac{az+b}{cz+d};\ \text{e}\ \tilde{w}=\varphi^*_M(z)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\bar{z}=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

sendo que $\bar{z}=x-iy$. (Estas são chamadas de **Transformações de Möbius**.)

Exercício 64: Verifique que se $w = M_1 z$ e $v = M_2 w$, então $v = Mz$, sendo M o produto de matrizes $M_1 M_2$.

Exercício 65: Verifique que se $c \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ad-bc)/c & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 66: Verifique que, dados A, B e C em $\mathbb{H}$ não colineares, se $D = M\,A$, $E = M\,B$ e $F = M\,C$ (transformações de Möbius), então $d(A,B) = d(D,E)$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$. Para isto, use a decomposição do exercício anterior e verifique apenas nos casos em que M tem uma das duas formas

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou } M = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e considere os dois tipos de transformações, φ_M e φ_M^*.

Exercício 67: Para finalizar, mostre que dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ em $\mathbb{H}$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, então existe uma transformação φ_M ou φ_M^* levando A em A', B em B' e C em C'. (Para isto, construa primeiro uma transformação que leve A em $A_0 = (0,1)$, B em $B_0 = (0,b)$, $b = d(A,B)$; com isto C é levado a algum $C_0 \in \mathbb{H}$; faça o mesmo com A', B' e C'; com isto, obtemos $\triangle ABC \equiv \triangle A_0B_0C_0 \equiv \triangle A'B'C'$.)

Com isto acabamos de esboçar a prova de que vale o LAL na geometria hiperbólica. (Com isto também acabou o tópico especial; o que vem daqui por diante cai em prova!)

Exercício 68: Mostre que no plano de Moulton não vale LAL.

Solução e/ou Sugestão: Considere os pontos $A = (1,0)$, $B = (0,0)$ e $C = (1,1)$. Mostre que a correspondência $A \mapsto A$, $B \mapsto C$, $C \mapsto B$ satisfaz as hipóteses mas não a conclusão do postulado LAL.

Exercício 69: Mostre que na geometria do taxista não vale LAL.

Solução e/ou Sugestão: Considere os pontos $A = (1,0)$, $B = (0,0)$ e $C = (1/2,1/2)$. Mostre que a correspondência $A \mapsto A$, $B \mapsto C$, $C \mapsto B$ satisfaz as hipóteses mas não a conclusão do postulado LAL.

Exercício 70: Na geometria hiperbólica, sejam $A = (-1,1)$, $B = (0,1)$, $C = (1,1)$, $D = (-2,2)$, $E = (0,2)$ e $F = (2,2)$. Mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. (Use o LAL.)

Exercício 71: Na geometria hiperbólica, dado o segmento $\overline{AB}$, em que $A = (a,b)$ e $B = (c,d)$ e dado um número real $t > 0$, sejam $C = t\,A = (t\,a, t\,b)$ e $D = t\,B = (t\,c, t\,d)$. Mostre que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. (Para isto, calcule $d(A,B)$ e $d(C,D)$.)

Exercício 72: Na geometria hiperbólica, dados A, B e C não colineares e $t > 0$, sejam $D = t\,A$, $E = t\,B$ e $F = t\,C$. Mostre que $\angle ABC \equiv \angle DEF$. (Para isto, ache os vetores v_{AB}, etc.)

Exercício 73: Mostre que se vale LAL então também valem

(a) ALA (Ângulo-Lado-Ângulo) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

(b) Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ se, e somente se, $\angle BAC \equiv \angle ABC$. (Tal triângulo é chamado de **isósceles**.)

(c) LLL (Lado-Lado-Lado) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.
Observação: Também vale o **LAAo** (Lado-Ângulo-ângulo oposto), mas isto vais ser feito mais adiante.

Solução e/ou Sugestão:

(a) Construímos um triângulo $\triangle DEG \equiv \triangle ABC$, com $\overline{AC} \equiv \overline{DG}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDG$ e G e F do mesmo lado de $\overleftrightarrow{DE}$. Queremos mostrar que $G = F$. Como $\angle BAC \equiv \angle EDG$, $G \in \overleftrightarrow{DF}$. Então ou $D - G - F$, ou $D - F - G$, ou $G = F$. Vamos mostrar que não podem ocorrer nem $D - G - F$ e nem $D - F - G$. Se $D - G - F$, então G está em $\mathsf{int}\,(\angle DEF)$ e, portanto $m(\angle DEG) < m(\angle DEF)$ uma contradição à hipótese de que $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ABC \equiv \angle DEG$ (esta última por LAL). O mesmo tipo de coisa acontece se supusermos que $D - F - G$ (faça isto). Portanto $G = F$, como queríamos mostrar.

(b) Se $\angle BAC \equiv \angle ABC$, por ALA, $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ (perceba a ordem dos pontos) e, portanto $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Se $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, por LAL (considerando o ângulo $\angle ACB$ entre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, que é congruente a si mesmo), $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$, e portanto $\angle BAC \equiv \angle ABC$.

(c) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, seja C' oposto a C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AC'} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC' \equiv \angle EDF$. Ou seja, construímos um triângulo $\triangle ABC'$ congruente ao $\triangle DEF$, "do lado de baixo" do $\triangle ABC$. Vamos mostrar que $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$, o que implica que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Seja $G \in \overleftrightarrow{AB}$ o ponto de encontro de $\overleftrightarrow{AB}$ com $\overline{BB'}$ (por quê existe tal ponto?). Então, ou $G - A - B$, ou $G = A$, ou $A - G - B$, ou $G = B$, ou $A - B - G$. Vamos considerar apenas o caso em que $G - A - B$, deixando os outros como exercício. Neste caso, os pontos C, C' e G não são colineares. Pelo item (b) deste exercício, $\triangle BAB'$ é isósceles (pois $\overline{AC} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{AC'}$) e, portanto, $\angle ACG \equiv \angle AC'G$. Também temos que $\triangle CBC'$ é isósceles (pois $\overline{BC} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{BC'}$) e, portanto, $\angle BCG \equiv \angle BC'G$, donde segue que $\angle BCA \equiv \angle BC'A$ (por quê?). Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$ (por quê?).

Exercício 74: Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$, mostre que, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$, então $\angle DAB \equiv \angle BCD$ e $\angle ABC \equiv \angle CDA$. (Considere os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$, etc.)

Exercício 75: Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$, mostre que, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{DA}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, então $\angle DAB \equiv \angle BCD \equiv \angle ABC \equiv \angle CDA$.

Exercício 76: Dado o polígono convexo $ABCDEF$ (um *hexágono*), suponha que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, $\overline{CD} \equiv \overline{FA}$ e $\angle FAB \equiv \angle CDE$, mostre que $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle BCD \equiv \angle EFA$. (Considere os triângulos $\triangle FAB$ e $\triangle CDE$, etc.)

Exercício 77: Dados A e B dois pontos distintos, ℓ_1 e ℓ_2 duas linhas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ e tais que $A \in \ell_1$ e $B \in \ell_2$, mostre que ℓ_1 e ℓ_2 são **paralelas** (isto é, não têm ponto comum). (Para isto, suponha que exista um ponto $C \in \ell_1 \cap \ell_2$; então mostre que $C \notin \ell$, tome $D \in \ell_1$ tal que $D - A - C$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$; mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$, e conclua que $C - B - D$, uma contradição a alguma hipótese.)

Exercício 78: Dados os pontos A, B, C e D, tais que $A \neq B$, C e D estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\angle ABC \equiv \angle BAD$. Mostre que $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas. (Novamente, suponha que não são paralelas e considere os triângulos pertinentes.)

Exercício 79: Mostre que dada uma linha ℓ e um ponto P fora de ℓ, então existe pelo menos uma linha ℓ' contendo P e paralela a ℓ. (Olhe o exercício anterior.)

Exercício 80: Ainda não é possível provar a unicidade da paralela: Mostre que as linhas $\ell_0 = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = 0\}$ e $\ell_{0,1} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + y^2 = 1\}$ contêm o ponto $P = (0, 1)$ e são paralelas à linha $\ell_1 = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = 1\}$. (É só mostrar que as linhas não se intersectam, mostrando que as equações pertinentes não têm solução comum em $\mathbb{H}$.)

Exercício 81: Dada uma linha ℓ e um ponto P fora de ℓ, mostre que existe uma única linha passando por B e perpendicular a ℓ.

Solução e/ou Sugestão: Seja $A \in \ell$ um ponto qualquer. Se $\overleftrightarrow{AB}$ for perpendicular a ℓ, então $\overleftrightarrow{AB}$ é a linha procurada. Caso contrário, seja C o ponto do lado de ℓ oposto a B e tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\angle DAB \equiv \angle DAC$, sendo D um outro ponto de ℓ. Seja G o ponto de encontro entre $\overline{BC}$ e ℓ. Então $\triangle AGB \equiv \triangle AGC$, por LAL e, portanto, $\angle AGB \equiv \angle AGC$. Como $B - G - C$, $m(\angle AGB) + m(\angle AGC) = 180$, donde $m(\angle AGB) = 90$, ou seja, $\overleftrightarrow{BC} \perp \ell$. A unicidade segue do fato que se $\ell_1 \perp \ell$ e $\ell_2 \perp \ell$ e $\ell_1 \neq \ell_2$, então ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas.

Exercício 82: Dados os pontos A, B, C e D tais que $A - B - D$ e C fora de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que $m(\angle DBC) > m(\angle BAC)$ e $m(\angle DBC) > m(\angle BCA)$. (Isto é, cada ângulo externo de um triângulo é maior que os dois ângulos internos não adjacentes.)

Solução e/ou Sugestão: Seja E do mesmo lado que C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $\angle BAC \equiv \angle DBE$. Então $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são paralelas (por quê?). Portanto C e A estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BE}$ e E e A estão em lados opostos de $\overleftrightarrow{BC}$ (por quê?), ou seja, $E \in \mathsf{int}\,(\angle DBC)$, donde segue que $m(\angle DBC) > m(\angle DBE) = m(\angle BAC)$. Agora, seja D' tal que $C - B - D'$. Então $\angle ABD' \equiv \angle CBD$, pois são opostos pelo vértice. Seja F do mesmo lado que D' em relação a $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $\angle D'BF \equiv \angle BCA$. Pela mesma argumentação acima, concluímos que $m(\angle DBC) > m(\angle BCA)$ (preencha os detalhes).

Exercício 83: LAAo (Lado-Ângulo-Ângulo oposto) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ e $ACB \equiv \angle DFE$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Seja $G \in \overleftrightarrow{DF}$, do mesmo lado de F em relação a $\overleftrightarrow{DE}$ e tal que $\overline{DG} \equiv \overline{AC}$. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$ e, protanto $\angle DGE \equiv \angle ACB$. Queremos mostrar que $G = F$. Para isto, temos que descartar as possibilidades $D-G-F$ e $D-F-G$ (por quê só estas?). Se $D-G-F$, o ângulo $\angle DGE$ é externo ao triângulo $\triangle GFE$ e, portanto, $m(\angle ACB) = m(\angle DGE) > m(\angle DFE)$, mas, por hipótese, $m(\angle ACB) = m(\angle DFE)$, uma contradição à desigualdade. Se $D-F-G$, o ângulo $\angle DFE$ é externo ao triângulo $\triangle GFE$ e, portanto, pelo mesmo raciocínio, chegamos a uma contradição. Portanto $G = F$, como queríamos mostrar.

Exercício 84: Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $d(A,B) > d(B,C)$ se, e somente se, $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$.

Solução e/ou Sugestão: Se $d(A,B) > d(B,C)$, seja D tal que $A-D-B$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$. Então $m(\angle ACB) > m(\angle BCD)$, pois $D \in \mathsf{int}\,(\angle ACB)$ e $m(\angle BCD) > m(\angle BAC)$, pois $\angle BCD$ é externo ao triângulo $\triangle ADC$. Portanto $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$. Reciprocamente, suponha que $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$. Então $d(A,B) = d(B,C)$ implica que $m(\angle ACB) = m(\angle BAC)$, pois $\triangle ABC$ seria isósceles e $d(A,B) < d(B,C)$ implica que $m(\angle ACB) < m(\angle BAC)$, pela argumentação acima. Ou seja, $d(A,B) \leq d(B,C)$ leva a contradições à hipótese $m(\angle ACB) > m(\angle BAC)$. Portanto $d(A,B) > d(B,C)$.

Exercício 85: Mostre que ALA implica LAL.

Exercício 86: Mostre que para todo triângulo $\triangle ABC$ são equivalentes:

(a) Todos os lados são congruentes entre si.

(b) Todos os ângulos internos são congruentes entre si.

Observação: A **bissetriz** de um ângulo $\angle AOB$ é a semi reta $\overrightarrow{OC}$ tal que $C \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$ e $\angle AOC \equiv \angle COB$. Dado o triângulo $\triangle ABC$, seja M o ponto médio de $\overline{BC}$; o segmento $\overline{AM}$ é chamado de uma **mediana** de $\triangle ABC$; a linha ℓ contendo M e perpendicular ao lado $\overline{BC}$ é chamada de **mediatriz** de $\overline{BC}$.

Exercício 87: Mostre que as três bissetrizes dos ângulos de um triângulo $\triangle ABC$ se encontram num ponto no interior de $\triangle ABC$. (Para isto, mostre que duas bissetrizes se encontram num ponto P no interior de $\triangle ABC$, desça perpendiculares de P aos três lados de $\triangle ABC$ e use congruência com os triângulos convenientes.)

Exercício 88: Mostre que se duas mediatrizes se encontram num ponto P, então e terceira mediatriz também passa por P. (Ligue P ao ponto médio do terceiro lado e use congruência de triângulos, com os triângulos convenientes. O próximo exercício mostra que precisamos da hipótese de que duas das mediatrizes se encontram.)

Exercício 89: Mostre que as mediatrizes do triângulo $\triangle ABC$ na geometria hiperbólica são paralelas, sendo que $A = (0,4)$, $B = (-6,4)$ e $C = (6,4)$ são pontos de $\mathbb{H}$. (Para isto, mostre que as mediatrizes são as linhas ℓ_0, ℓ_3 e ℓ_{-3}.)

Exercício 90: Mostre que num triângulo isósceles as três medianas se encontram num ponto. (Mostre que duas se encontram num ponto P e ligue este ponto ao ponto médio do terceiro lado, etc.)

Exercício 91: Dados $A - B - C$ e D e E do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que se $m(\angle EBC) < m(\angle DAC)$, então as semi retas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BE}$ não se encontram. (Construa um ângulo $\angle FBC \equiv \angle DAC$ com F do mesmo lado que E em relação a $\overleftrightarrow{AC}$, etc.)

Exercício 92: Dado o triângulo $\triangle ABC$, seja $P \in \overleftrightarrow{BC}$ o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, passando por A. Mostre que, se $m(\angle ABC) < 90$ e $m(\angle ACB) < 90$, então $B - P - C$.

Exercício 93: Mostre que num triângulo isósceles, cujos ângulos internos não sejam maiores que 90, as três alturas se encontram num ponto no interior do triângulo.

Exercício 94: Mostre que existe em $\mathbb{H}$ um triângulo isósceles com um ângulo maior que 90, cujas alturas não se encontram em $\mathbb{H}$. (Considere $\triangle ABC$, $A = (0, 2)$, $B = (-1, 1)$ e $C = (1, 1)$; quais são suas alturas?)

Exercício 95: Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$, mostre que $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$.

Exercício 96: Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $m(\angle BAD) = m(\angle CDA) = 90$, sejam M e N os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Mostre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e a $\overline{BC}$. (Para isto, primeiro mostre que $\angle ABC \equiv \angle DCB$. Este tipo de quadrilátero é chamado de **quadrilátero de Saccheri** e vai ser importante posteriormente, quando formos estudar paralelismo.)

---

11. Desigualdades Geométricas:

Vamos desenvolver algumas desigualdades envolvendo ângulos e medidas de segmentos. Para facilitar o entendimento, vamos estabelecer algumas notações relativas a comparações de tamanhos de segmentos e ângulos.

NOTAÇÕES: Se $d(A, B) < d(C, D)$, escreveremos $AB < CD$ (sem as barras); se $d(A, B) \leq d(C, D)$, escreveremos $AB \leq CD$; se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, escreveremos $AB = CD$; se $d(A, B) = d(C, D) + d(E, F)$, escreveremos $AB = CD + EF$; se $m(\angle AOB) < m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB < \angle CPD$ e se $m(\angle AOB) \leq m(\angle CPD)$, escreveremos $\angle AOB \leq \angle CPD$.

Exercício 97: Dados $A - B - D$, e C fora de $\overleftrightarrow{AB}$, mostre que $\angle BAC < \angle DBC$ e $\angle ACB < \angle DBC$.

Solução e/ou Sugestão: Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, e seja E tal que $A - M - E$ e $\overline{AM} \equiv \overline{ME}$. Então $\triangle AMC \equiv \triangle EMB$ (por quê?) e E está no interior de $\angle DBC$ (por quê?). Como $\angle ACB \equiv \angle EBC$, $\angle ACB < \angle DBC$.

Para a outra desigualdade, seja F tal que $C - B - F$. Então $\angle DBC \equiv \angle FBA$. Pelo mesmo argumento acima, mostramos que $\angle BAC < \angle DBC$ (faça isto!).

Exercício 98: Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos a estes lados também não são congruentes. Mostre que o maior entre estes dois ângulos é oposto ao maior entre os dois lados em questão.

Solução e/ou Sugestão: Dado o triângulo $\triangle ABC$, suponha que $AB > AC$. Seja D o único ponto tal que $A - C - D$ e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Então o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles e $\angle ADB \equiv \angle ABD$. Como C está no interior de $\angle ABD$, $\angle ABC < \angle ABD \equiv \angle ADB < \angle ACB$ (por quê?).

Exercício 99: Mostre a recíproca do exercício anterior, ou seja, se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos também não são congruentes e o maior destes lados é oposto ao maior destes ângulos.

Exercício 100: (Desigualdade Trangular I) Dado o triângulo $\triangle ABC$, mostre que $d(A,C) < d(A,B) + d(B,C)$ (ou seja $AC < AB + BC$).

Solução e/ou Sugestão: Seja D tal que $C - B - D$ e $\overline{AB} \equiv \overline{BD}$. Então $\angle BAD \equiv \angle BDA$. Como B está no interior de $\angle CAD$, $\angle BDA \equiv \angle CAD > \angle BAD$ e, portanto, pelo exercício acima, $AC < AD = CB + BD = AB + BC$.

Exercício 101: (Desigualdade Trangular II) Dados os pontos A, B, e C, mostre que $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. (Considere os vários casos em que A, B e C são colineares, etc.)

Exercício 102: Dado os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC > \angle DEF$, mostre que $AC > DF$.

Solução e/ou Sugestão: Para isto, construímos o triângulo $\triangle HBC \equiv \triangle DEF$, com H do mesmo lado que A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ (por quê podemos construí-lo e por quê é único?). Como $\angle ABC > \angle DEF$, temos $\angle ABC > \angle HBC$. Pelas barras cruzadas, a semi reta $\overrightarrow{BH}$ cruza $\overline{AC}$ num ponto K. Podemos ter três casos, a saber, $B - H - K$, ou $H = K$, ou $B - K - H$. Construímos um triângulo auxiliar $\triangle ABM$ tal que M é o ponto em $\overline{AK}$ que está na bissetriz do ângulo $\angle ABH$ (pelas barras cruzadas). Por LAL e usando a hipótese $\overline{AB} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BH}$, temos que $\triangle ABM \equiv \triangle HBM$ e, portanto $\overline{AM} \equiv \overline{HM}$. Pela desigualdade triangular, $HC \leq HM + MC$. Nos casos em que $K \neq H$, temos $HC < HM + MC$, ou seja, $DF = HC < AM + MC = AC$. No caso em que $H = K$, a desigualdade $DF = HC < AC$ decorre do fato que $A - H - C$.

Exercício 103: Dado um triângulo $\triangle ABC$, tal que $AC \leq AB$, se $B - D - C$, mostre que $AD < AB$. (Para isto, mostre que $\angle ABC < \angle ADB$, etc.)

Exercício 104: Dado o triângulo isósceles $\triangle ABC$ (tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$), mostre que $m(\angle ABC) < 90$.

Exercício 105: Mostre que qualquer triângulo tem pelo menos dois ângulos internos agudos (isto é, medem menos que 90).

---

12. Triângulos Retângulos:

Um triângulo é chamado de **triângulo retângulo** se um de seus ângulos internos for reto (ou seja, se medir 90). Os lados adjacentes ao ângulo reto são os **catetos** e o lado oposto a **hipotenusa**. Veremos que o famoso teorema de Pitágoras só vale na geometria euclideana.

Exercício 106: Mostre que o **Teorema de Pitágoras** vale na geometria analítica, isto é, mostre que dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto $\angle BAC$, mostre que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (Use o produto escalar de vetores.)

Exercício 107: Mostre que o Teorema de Pitágoras não vale na geometria hiperbólica. (Considere o triângulo $\triangle ABC$ em $\mathbb{H}$ tal que $A = (0, 5)$, $B = (0, 7)$ e $C = (3, 4)$; calcule $d(A, B)$, etc.)

Exercício 108: Mostre que a hipotenusa é maior do que os catetos. Use isto para mostrar que o ponto de uma linha ℓ mais próximo de um ponto P fora de ℓ é o pé da perpendicular a ℓ que passa por P.

Observação: Definimos a **distância** do ponto P à linha ℓ como $d(P, \ell) = d(P, Q)$, sendo que $P = Q$, se $P \in \ell$, ou Q é o pé da perpendicular a ℓ passando por P. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja $D \in \overleftrightarrow{AB}$ o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C. O segmento $\overline{CD}$ é uma **altura** de $\triangle ABC$.

Exercício 109: Mostre que $d(P, \ell) \leq d(P, R)$, se $R \in \ell$ e $d(P, \ell) = d(P, R)$ se, e somente se, $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$.

Exercício 110: Mostre que se $\overline{AB}$ é o maior lado de $\triangle ABC$ e $\overline{CD}$ é uma altura sobre o lado $\overline{AB}$, então $A - D - B$. (Compare ângulos opostos aos lados convenientes.)

Exercício 111: (LLA para triângulos retângulos) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Seja $G \in \overleftrightarrow{DF}$ tal que $G - D - F$ e $GD = AC$. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$ (por quê?). Como $BC = EF$, $EF = BC = EG$ e, portanto, o triângulo $\triangle EFG$ é isósceles, com $\angle DFE \equiv \angle DGE$. Por LAAo, $\triangle DEF \equiv \triangle DEG \equiv \triangle ABC$ (por quê?).

Exercício 112: Nem sempre vale o critério LLA para triângulos não retângulos, isto é, dado o triângulo $\triangle ABC$ não retângulo e tal que $BC < AC$, existe um triângulo $\triangle DEF$, tal que $\angle BAC \equiv \angle EDF$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$. Em que casos vale este critério? Basta acrescentar a hipótese de que $BC > AB$?

Solução e/ou Sugestão: Para isto, seja $\overline{AG}$ uma altura, com $G \in \overleftrightarrow{BC}$. Então, ou $A - G - C$, ou $A - C - G$, pois $G \neq A$ e $G \neq C$, por não ser triângulo retângulo, e $G - A - C$ implicaria que $BC > AC$ (por quê?). Seja $E \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que $E - G - C$ e $EG = CG$. Então $E \in \overrightarrow{AC}$, pois se $E \notin \overrightarrow{AC}$, novamente teríamos $BC > AC$ (por quê?). Também temos que $E \neq A$ (por quê?). Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ satisfazem as hipóteses $\angle BAC \equiv \angle BAE$, $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BE}$, mas não são congruentes (por quê?).

Exercício 113: Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle BAC$ e $\angle EDF$ sejam retos, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\angle ABC \equiv \angle DEF$, mostre que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Solução e/ou Sugestão: Use LAAo.

Exercício 114: Dados $A \neq B$, seja $M \in \overline{AB}$ o ponto médio e seja ℓ contendo M e perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e seja P um ponto qualquer. Mostre que $AP = BP$ se, e somente se, $P \in \ell$. (Isto é, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de A e B.)

Solução e/ou Sugestão: Mostre que se $P \in \overleftrightarrow{AB}$ então $P = M \in \ell$ e se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, desça uma perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por P, seja $N \in \overleftrightarrow{AB}$ o pé da perpendicular. Mostre que $\triangle PNA \equiv \triangle PNB$ e conclua que $N = M$ e, portanto $P \in \ell$.

Exercício 115: Seja $\overrightarrow{BD}$ a bissetriz de $\angle ABC$ e sejam $E \in \overrightarrow{BA}$ e $F \in \overrightarrow{BC}$ os pés das perpendiculares passando por D. Mostre que $DE = DF$.

Exercício 116: Mostre que $\triangle ABC$ é isósceles se, e somente se, quaisquer duas das seguintes figuras são colineares:

(a) uma mediana de $\triangle ABC$;

(b) uma altura de $\triangle ABC$;

(c) uma mediatriz de $\triangle ABC$;

(d) uma bissetriz de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: São seis casos a serem considerados, (a) e (b), ou (a) e (c), ou etc. Por exemplo, seja M o ponto médio de $\overline{BC}$ e suponha que a mediana $\overline{AM}$ também é uma altura. Por LAL, $\triangle AMB \equiv \triangle AMC$, etc.

---

13. Circunferências:

Dado um ponto C e um número real $r > 0$, o conjunto $\mathbb{C} = \{P : d(P, C) = r\}$ é chamado de **circunferência**, sendo C chamado de seu **centro** e r o seu **raio**. Se $A, B \in \mathcal{C}$ são tais que $A - C - B$, então o segmento $\overline{AB}$ é chamado de **diâmetro** de $\mathbb{C}$ e $\overline{CA}$ de **segmento radial** ou, por um abuso de linguagem, também chamaremos de **raio** de $\mathbb{C}$; o **interior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto $\mathsf{int}(\mathbb{C}) = \{P : d(P, C) < r\}$; o **exterior** de $\mathbb{C}$ é o conjunto

$\mathsf{ext}\,(\mathbb{C}) = \{P : d(P,C) > r\}$. Vamos estudar algumas propriedades de circunferências usando apenas os postulados até agora listados (isto é, até o LAL).

NOTAÇÃO: Caso precisemos especificar o centro e o raio de $\mathbb{C}$, escreveremos $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 117: Mostre que o conjunto $\mathbb{A} = \{(x,y) \in \mathbb{H} : x^2 + (y-5)^2 = 16\}$ é a circunferência de centro $(0,3)$ e raio $\ln 3$ na geometria hiperbólica. Ou seja, a circunferência hiperbólica coincide com a euclideana, mas com seu centro deslocado para baixo. (Para isto, tome um ponto $(a,b) \in \mathbb{A}$ e mostre que $d((a,b),(0,3)) = \ln 3$; divida em casos $a = 0$ e $a \neq 0$; neste último, ache $\ell_{p,r}$ tal que $(a,b) \in \ell_{p,r}$ e $(0,3) \in \ell_{p,r}$, para calcular a distância; não esqueça de usar a equação $x^2+(y-5)^2 = 16$ para o ponto (a,b).)

Exercício 118: Esboce a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 na geometria do taxista. (Mostre que a equação que a define é $|x| + |y| = 1$.)

Exercício 119: Verifique que a circunferência de centro $(-1,0)$ e raio 2 no plano de Moulton é descrita por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 4$, se $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ e $4x + 8 = \sqrt{(x+2)^2 + 4y^2} + \sqrt{x^2 + y^2(2-x)^2}$, se $x > 0$ e $y > 0\}$.

Exercício 120: Voltando às geometrias que satisfazem LAL, dados três pontos P, Q e R não colineares e tais que as mediatrizes de $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ se encontram, mostre que existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ contendo estes pontos.

Solução e/ou Sugestão: Seja C o ponto de encontro das mediatrizes e $r = d(C,P)$. Por congruênciade triângulos (quais?), $CP = CQ = CR$ e, portanto $P,Q,R \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$. Para mostrar a unicidade de $\mathbb{C}$, suponha que $P,Q,R \in \mathbb{C}_{D,s}$, para um ponto D e um número real $s > 0$. Sejam M o ponto médio de $\overline{PQ}$ e N o ponto médio de $\overline{QR}$. Então, por congruências de triângulos (quais?), $\overline{DM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $\overline{DN}$ é perpendicular a $\overline{QR}$. Portanto $D = C$ e $s = r$ (por quê?).

Exercício 121: Mostre que se A e B são dois pontos da circunferência $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que C está na mediatriz de $\overline{AB}$.

Exercício 122: Mostre que uma circunferência $\mathbb{C}$ pode ser **circunscrita** num triângulo $\triangle ABC$ (isto é, seus vértices A, B e C estão em $\mathbb{C}$) se, e somente se, suas mediatrizes se encontram num ponto (e este ponto é chamado de **circuncentro** de $\triangle ABC$). Observe que na geometria hiperbólica existem triângulos em que isto não acontece.

Exercício 123: Mostre que $\mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$ é convexo. (Para isto, sejam $A, B \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$, $A \neq B$, e seja $D \in \overline{AB}$; mostre que $D \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C}_{C,r})$; considere dois casos: $C \in \overline{AB}$ e compare distâncias; $C \notin \overline{AB}$ e considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ e compare os lados.)

Exercício 124: Uma linha ℓ é dita uma **tangente** à circunferência $\mathbb{C}$ se $\ell \cap \mathbb{C}$ contém um único ponto. Mostre que se $A \in \mathbb{C}$ e C é o centro de $\mathbb{C}$, então a linha ℓ perpendicular a $\overline{CA}$ e passando por A é uma tangente a $\mathbb{C}$. (Para isto, mostre que se $B \in \ell$ e $B \neq A$, então $CB > CA$.)

Exercício 125: Uma linha ℓ é dita uma **linha secante** de $\mathbb{C}$, se ela intersecta $\mathbb{C}$ em mais de um ponto. Mostre que neste caso ℓ encontra $\mathbb{C}$ em exatamente dois pontos A e B. (Separe em dois casos: ℓ contém o centro e ℓ não contém o centro.)

Exercício 126: Mostre que se ℓ é uma tangente à circunferência $\mathbb{C}$ passando pelo ponto $A \in \mathbb{C}$, então ℓ é perpendicular a $\overline{AC}$, sendo C o centro de $\mathbb{C}$.

Exercício 127: Mostre que para qualquer triângulo $\triangle ABC$, existe uma única circunferência $\mathbb{C}$ **inscrita** em $\triangle ABC$ (isto é, $\mathbb{C}$ é tangente aos três lados de $\triangle ABC$). (Mostre que o centro desta circunferência, chamado de **incentro** de $\triangle ABC$, é o ponto de encontro das bissetrizes de $\triangle ABC$.)

Exercício 128: Seja $f : \ell \to \mathbb{R}$ uma régua e $P \notin \ell$ um ponto. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = d(P, Q)$, sendo que $Q \in \ell$ e $f(Q) = x$. Mostre que h é contínua.

Solução e/ou Sugestão: Precisamos mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < \delta$, temos $|h(x + t) - h(x)| < \varepsilon$. (Lembre-se que isto é a definição de continuidade de uma função.)

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $Q \in \ell$, tal que $f(Q) = x$, $\varepsilon > 0$, $R, S \in \ell$ tais que $R{-}Q{-}S$ e $d(R, Q) = d(S, Q) = \varepsilon$. Se $T \in \mathsf{int}\,(\overline{RS})$, então $d(T, Q) < \varepsilon$ (Q é o ponto médio de $\overline{RS}$). Pela desigualdade triangular aplicada aos pontos P, Q e T, temos $PQ + TQ \geq PT$ e $PT + TQ \geq PQ$. Destas duas desigualdades obtemos $PT - PQ \leq TQ$ e $PQ - PT \leq TQ$, donde segue que $|PQ - PT| \leq TQ$. Traduzindo isto em termos da função h, temos $|h(Q) - h(T)| < d(T, Q)$. Seja $t = f(T) - f(Q)$; então $f(T) = x + t$ e $d(T, Q) = |t|$; portanto $|h(Q) - h(T)| < |t|$. Se fizermos $\delta = \varepsilon$, obtemos que se $|t| < \delta = \varepsilon$ então $|h(Q) - h(T)| < \varepsilon$, como queríamos mostrar.

Exercício 129: Dados A, B e C não colineares e tais que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$, e dado $r \in \mathbb{R}$ tal que $d(A, C) < r$, mostre que existe um ponto $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(C, D) = r$. (Para isto, seja $E \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(A, E) = r$; mostre que $d(C, E) > r$; use a função do exercício anterior para obter o resultado desejado; lembre-se do Teorema do Valor Intermediário, que diz que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, e $f(a) < f(b)$, se $f(a) \leq r \leq f(b)$ então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = r$.)

Exercício 130: Mostre que se ℓ contém algum ponto do interior da circunferência $\mathbb{C}$, então ℓ é uma linha secante de $\mathbb{C}$. (Para isto, desça uma perpendicular do centro C de $\mathbb{C}$ a ℓ; seja A o pé da perpendicular; use o exercício acima.)

Exercício 131: Mostre que dada a circunferência $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{C,r}$ e $P \in \mathsf{ext}\,(\mathbb{C})$, então existem exatamente duas linhas passando por P e tangentes a $\mathbb{C}$.

Solução e/ou Sugestão: Seja A o ponto de interseção entre o segmento $\overline{PC}$ e a circunferência $\mathbb{C}$. Seja $s = d(P, C)$; observe que $s > r$. A linha ℓ perpendicular a $\overline{PC}$ pelo ponto A contém o ponto A, que está no interior de $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{C,s}$ e, portanto intersecta $\mathbb{D}$ em exatamente dois pontos R e S. Seja B o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CR}$ e D o ponto de interseção de $\mathbb{C}$ e $\overline{CS}$. Por LAL, $\triangle CBP \equiv \triangle CDP \equiv \triangle CAR$ (por quê?). Portanto $\overleftrightarrow{PB} \perp \overline{CB}$ e $\overleftrightarrow{PD} \perp \overline{CD}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{PD}$ são tangentes a $\mathbb{C}$ e são duas linhas distintas.

Vamos mostrar agora que não existe outra linha tangente a $\mathbb{C}$, passando por P. Para isto, observe que se $X \in \mathbb{C}$, $X \neq A$ e $X \neq B$, então $X \in \mathsf{int}\,(\angle BPD)$ (por quê?). Portanto, se ℓ contém P mas não intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, então também não intersecta $\mathbb{C}$. Se ℓ intersecta $\mathsf{int}\,(\angle BPD)$, pelas barras cruzadas, ℓ intersecta $\overline{BD}$, num ponto F tal que $B - F - D$. Mas $F \in \mathsf{int}\,(\mathbb{C})$ (por quê?) e, portanto ℓ é uma linha secante de $\mathbb{C}$. Portanto, só $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{PD}$ são tangentes a $\mathbb{C}$.

Exercício 132: Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos retângulos, com ângulos retos nos vértices A e D, respectivamente, tais que $BC = EF$, $AB > DE$. Mostre que $AC < DF$.

Solução e/ou Sugestão: Sejam $G \in \overrightarrow{DE}$ e $H \in \overrightarrow{DF}$ tais que $\triangle ABC \equiv \triangle DGH$. Como $AB > DE$, temos que $D - E - G$. Queremos mostrar que $D - H - F$ e, portanto $AC = DH < DF$. Para isto, vamos mostar que tanto $H = F$ quanto $D - F - H$ levam a uma contradição. Suponha que $H = F$; como $\angle DEH$ é agudo (por quê?), o ângulo suplementar $\angle GEH$ é obtuso e, portanto é o maior ângulo de $\triangle GEH$, o que implica que o lado oposto $\overline{GH}$ é o maior dos lados de $\triangle GEH$. Mas isto contradiz o fato que $GH = GF = BC = EF$. Se $D - F - H$, usando o triângulo $\triangle GFH$, pelo mesmo tipo de argumentação, obtemos uma contradição (como?).

Exercício 133: Dada a linha ℓ, $A \in \ell$, $r > 0$ e H_1, um dos lados de ℓ, seja h a função $h(x) = d(P, X)$, sendo que $X \in \ell$ é tal que $f(X) = x$, sendo $f : \ell \to \mathbb{R}$ uma régua de ℓ tal que $f(A) = 0$ e $P \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{A,r}$ está em H_1 ou em ℓ e também na linha perpendicular a ℓ, passando por X. Mostre que o domínio de h é o intervalo fechado $[-r, r]$ e que h é contínua neste intervalo.

Solução e/ou Sugestão: Se $P \in \mathbb{C}$, $P \notin \ell$, e X é o pé da perpendicular a ℓ passando por P, então X está no interior de $\mathbb{C}$ (por quê?) e, portanto, $|f(X)| = |f(X) - f(A)| = d(X, A) < r$. Se $P \in \mathbb{C} \cap \ell$, então $|f(P)| = r$; finalmente, se $X \in \ell$ e $d(X, A) > r$, então a linha perpendicular a ℓ e contendo X não intersecta a circunferência $\mathbb{C}$. Portanto o domínio de h é $[-r, r]$. Sejam $B, C \in \ell$ tais que $f(B) = -r$ e $f(C) = r$.

Para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, r]$, dividiremos em dois casos, a saber, $-r \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq r$.

Consideremos o caso em que $-r \leq x \leq 0$. Observe que se $-r \leq t < u \leq 0$, então $h(t) < h(u)$, pois se $T, U \in \ell$ são tais que $f(T) = t$, $f(U) = u$, sejam $P, Q \in \mathbb{C} \cap H_1$, tais que $\overline{PT} \perp \ell$ e $\overline{QU} \perp \ell$. Pelo exercício anterior, considerando os triângulos retângulos $\triangle ATP$ e $\triangle AUQ$, temos que $TP < UQ$ (por quê?). Portanto $h(t) = d(T, P) < d(U, Q) = h(u)$. Por outro lado, dado $s \in \mathbb{R}$, tal que $0 = h(-r) < s < h(0) = r$, existe $X \in \ell$ tal que $h(x) = s$, pois se $D \in H_1$ é tal que $\overline{DA} \perp \ell$ e $d(D, A) = s$, seja $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $d(X, D) = r$ (por quê tal ponto existe?). Então, considerando o triângulo retângulo $\triangle DAX$, temos que $AX < DX = AB$ (por quê?), ou seja, $B - X - A$. Seja $R \in \mathbb{C} \cap H_1$ tal que $\overline{RX} \perp \ell$. Por LAL, $\triangle DAX \equiv \triangle RXA$ e, portanto $h(x) = d(X, R) = s$, sendo $x = f(X)$. Ou seja, provamos que h é estritamente crescente em $[-r, 0]$ e que, para cada $s \in [0, r] = [h(-r), h(0)]$, existe algum $x \in [-r, 0]$, tal que $h(x) = s$. Vamos usar isto para mostrar que h é contínua em cada $x \in [-r, 0]$.

Primeiro, consideremos $x \in]-r, 0[$. Dado $\varepsilon > 0$, sejam $a, b \in]-r, 0[$, $a < h(x) < b$, $|h(x) - a| < \varepsilon$, $|h(x) - b| < \varepsilon$ e $t, u \in]-r, 0[$, tais que $h(t) = a$ e $h(u) = b$. Então, como provamos que h é crescente em $[-r, 0]$, temos que $t < x < u$. Seja $\delta = \min\{|x - a|, |x - b|\}$. Então se $|x - w| < \delta$, temos que $a < w < b$, e portanto, $|h(x) - h(w)| < \max\{|h(x) - a|, |h(x) - b|\} < \varepsilon$ (por quê?).

Ficam para os leitores tratarem dos casos em que $x = -r$, $x = 0$ e $x \in [0, r]$.

Exercício 134: Mostre que se $0 < r, s < d(A, B) < r + s$, então as circunferências $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,r}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,s}$ se encontram em dois pontos.

Solução e/ou Sugestão: Escolhemos um lado H_1 de ℓ e definimos funções $h_{\mathbb{A}} : [-r, r] \to \mathbb{R}$ e $h_{\mathbb{B}} : [b - s, b + s] \to \mathbb{R}$ (com domínio deslocado de $b = f(B)$, sendo f uma régua de ℓ tal que $f(A) = 0$ e $f(B) > 0$), $h_{\mathbb{A}}(x) = d(X, P)$, sendo $x = f(X)$, $P \in \mathbb{A} \cap (H_1 \cup \ell)$ e $\overline{PX} \perp \ell$ e $h_{\mathbb{B}}(y) = d(Y, Q)$, sendo $y = f(Y)$, $Q \in \mathbb{B} \cap (H_1 \cup \ell)$ e $\overline{QY} \perp \ell$, como no exercício anterior. Como $0 < r, s < d(A, B) = b < r + s$, temos $b - s < r$, ou seja, a função $h(x) = h_{\mathbb{A}}(x) - h_{\mathbb{B}}(x)$ está definida no intervalo $[b - s, r]$. Neste intervalo, $h_{\mathbb{A}}$ é decrescente e $h_{\mathbb{B}}$ é crescente (por quê?). Temos que $h(b - s) = h_{\mathbb{A}}(b - s) - h_{\mathbb{B}}(b - s) = h_{\mathbb{A}}(b - s) > 0$ e que $h(r) = h_{\mathbb{A}}(r) - h_{\mathbb{B}}(r) = -h_{\mathbb{B}}(r) < 0$. Como h é contínua (pois é diferença de duas funções contínuas) e muda de sinal, existe $x \in [b - s, r]$, tal que $h(x) = 0$. Se $x = f(X)$, $X \in \ell$, então os pontos $P \in \mathbb{A} \cap H_1$ e $Q \in \mathbb{B} \cap H_1$, tais que $\overline{PX} \perp \ell$ e $\overline{QX} \perp \ell$ são tais que $d(P, X) = d(Q, X)$. Portanto $P = Q$. O outro ponto de encontro de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ é o ponto $R \in \overleftrightarrow{PX}$ tal que $P - X - R$ e $PX = XR$ (por quê?).

Observação: O exercício anterior descreve uma propriedade importante do instrumento de desenho que traça circunferências, que é o **compasso**. De certo modo, podemos dizer que uma circunferência é uma *curva contínua*. Sua utilidade será explorada nos exercícios a seguir.

---

14. Primeiras Construções com Régua e Compasso:

Um ponto importante em geometria, principalmente em aplicações práticas, são construções com réguas não graduadas e compassos. Alguns dos problemas mais famosos de tais tipos de construções são construções de polígonos regulares (isto é, todos os lados são congruentes e todos os ângulos são congruentes). Muitas das construções são válidas apenas na geometria analítica ou na geometria hiperbólica e outras são impossíveis. Por exemplo, na geometria analítica, o matemático francês E. Galois descobriu um critério geral de construtibilidade, estudado em cursos sobre a *Teoria de Galois* (por exemplo, Álgebra III do bacharelado). Vamos apenas descrever algumas construções possíveis comuns a todas as geometrias em que valem os postulados enunciados até agora (até LAL).

ATENÇÃO: Nesta seção, descrever as construções usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Por exemplo, para construir uma linha, contruir dois pontos dela. Descrever as construções e mostrar que são corretas.

Exercício 135: (Construção de Triângulos) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > b$ e $a < c < a + b$, mostre que existe um triângulo $\triangle ABC$, tais que seus lados medem a, b e c. (Para isto, seja ℓ uma linha, $A, B \in \ell$ dois pontos tais que $d(A, B) = c$ e seja H_1 um dos lados de ℓ. Sejam $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{A,b}$ e $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{B,a}$ as circunferências de centros A e B e raios b e a, respectivamente; etc.)

Exercício 136: (Construção de Perpendiculares I) Dada uma linha ℓ e um ponto $P \in \ell$, construir com compasso e régua uma linha $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$. (Para achar um ponto A tal que $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$, seja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, sejam $B, C \in \ell$, tais que $B - P - C$ e $B, C \in \mathbb{C}_{P,r}$; seja $A \in \mathbb{C}_{B,2r} \cap \mathbb{C}_{C,2r}$; por quê tal A existe e $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$?)

Exercício 137: (Construção de Perpendiculares II) Dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, construir com compasso e régua uma linha $\overleftrightarrow{AP} \perp \ell$. (Escolha um ponto $C \in \ell$ e trace a circunferência de centro P, contendo C, etc.)

Exercício 138: Dado o segmento $\overline{AB}$, construir com régua não graduada e compasso o ponto médio de $\overline{AB}$.

Exercício 139: Dado o triângulo $\triangle ABC$, achar o ponto D tal que $\square ABCD$ seja um quadrilátero convexo com $CD = AB$ e $AD = BC$.

Exercício 140: Dado o ângulo $\angle AOB$, achar sua bissetriz.

Observação: Nos *Elementos* de Euclides, os instrumentos de desenho são uma régua não graduada e um compasso que colapsa (se o tiramos do papel, perdemos sua abertura). Portanto só podemos construir uma circunferência se conhecermos seu centro e um ponto dela. Com isto, não é imediato construir um ponto B na semi-reta $\overrightarrow{AP}$ tal que $\overline{AB}$ seja congruente a um segmento $\overline{CD}$ dado. Por isso, as três primeiras Proposições dos *Elementos*, descrevem como obter tal segmento. A primeira descreve como obter um triângulo equilátero $\triangle ABC$, conhecendo seu lado $\overline{AB}$; a segunda descreve como obter um segmento $\overline{AB}$, dado o ponto A e congruente ao segmento $\overline{CD}$ também dado; por fim, a terceira descreve como construir $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, com $B \in \overrightarrow{AP}$, sendo dados $\overline{CD}$ e $\overrightarrow{AP}$. Vamos descrever tais construções no exercício seguinte.

Exercício 141: São dados o segmento $\overline{CD}$ e a semi-reta $\overrightarrow{AP}$. Construir um ponto E tal que $\triangle ACE$ seja equilátero (usando o exercício acima). Com centro em C, traçar a circunferência $\mathbb{A} = \mathbb{C}_{C,r}$, sendo $r = d(C, D)$. Seja G o ponto de encontro entre $\overrightarrow{EC}$ e $\mathbb{A}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Seja $\mathbb{B} = \mathbb{C}_{E,s}$, sendo que $s = d(E, G)$. Seja $F \in \overrightarrow{EA} \cap \mathbb{B}$ (por tal ponto quê existe e é único?). Mostre que $\overline{AF} \equiv \overline{CD}$. Seja $\mathbb{D} = \mathbb{C}_{A,t}$, sendo $t = d(A, F)$ e seja $B \in \overrightarrow{AP} \cap \mathbb{D}$. Observe que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

---

15. Geometria Absoluta:

A teoria de geometria baseada nos postulados 1 a 7, enunciados até agora é chamada de *Geometria Absoluta* ou *Geometria Neutra*. Estes postulados ainda não são suficientes para caracterizar a geometria euclideana (ou analítica), pois vimos que tanto na geometria euclideana, como na hiperbólica, valem os postulados 1 a 7. Veremos mais adiante que o postulado das paralelas é o que falta para tal caracterização. Mas antes, vamos apresentar a primeira formulação da geometria absoluta, feita por D. Hilbert em 1900, que é equivalente á geometria métrica (com Pasch e LAL), apresentada nestas notas e que foi desenvolvida por G. D. Birkhoff em 1933. São postulados:

(A) Postulados de Incidência:

Postulado I: Dados dois pontos distintos P e Q, existe uma única linha contendo P e Q.

Postulado II: Toda linha contém pelo menos dois pontos.

Postulado III: Existem pelo menos três pontos não colineares.

Observação: Nos exercícios desta seção, usar somente os postulados enunciados aqui.

Exercício 142: Mostre que existem pelo menos três linhas distintas não concorrentes (isto é, existem ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 distintas e que não contêm um mesmo ponto P.)

Exercício 143: Mostre que dado um ponto P, existem pelo menos duas linhas distintas contendo P.

(B) Postulados de Ordem (ou "Estar Entre"):

Postulado IV: Se $A-B-C$, então A, B e C são colineares e dois a dois distintos.

Postulado V: Se $A-B-C$, então $C-B-A$.

Postulado VI: Dados $B \neq D$, existem $A, C, E \in \overleftrightarrow{BD}$ tais que $A-B-D$, $B-C-D$ e $B-D-E$.

Postulado VII: Dados $A, B, C \in \ell$, pontos distintos, então exatamente uma das relações $A-B-C$, ou $A-C-B$ ou $B-A-C$ é verdadeira.

Postulado VIII: (Pasch) Dados três pontos A, B e C não colineares, um ponto F e uma linha ℓ, tais que $F \in \ell$, $\ell \neq \overleftrightarrow{AB}$ e $A-F-B$, então existe um ponto $G \in \ell$, tal que ou A-G-C, ou B-G-C, ou $G = C$. (Isto é, se a linha ℓ cruza o lado $\overline{AB}$ em F, então ℓ cruza um dos outros dois lados.)

Lembre-se que este postulado é equivalente ao postulado da separação do plano.

Exercício 144: Dados A e B distintos, mostre que $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ e que $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

Exercício 145: Dados $A-B-C$ e $A-C-D$, mostre que $B-C-D$ e $A-B-D$.

Exercício 146: Dados $B-A-C$ e $P \in \overleftrightarrow{AB}$, mostre que ou $P \in \overrightarrow{AB}$, ou $P \in \overrightarrow{AC}$.

Exercício 147: Dados $A-B-C$, mostre que $\overline{AC} = \overline{AB} \cup \overline{BC}$ e que B é o único ponto comum aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Exercício 148: Dados $A-B-C$, mostre que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ e que B é o único ponto comum às semi-retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

(C) Postulados de Congruência:

Postulado IX: Dados dois pontos distintos P e Q e uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$, existe um único ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AC} \equiv \overline{PQ}$.

Postulado X: Dados A, B, C, D, E e F, temos $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ e, se $AB \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$.

Postulado XI: Se $A-B-C$, $P-Q-R$, $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$.

Postulado XII: Dados o ângulo $\angle AOB$, uma semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ e um dos lados H_1 de $\overleftrightarrow{PQ}$, existe uma única semi-reta $\overrightarrow{PR}$ tal que $R \in H_1$ e $\angle AOB \equiv \angle RPQ$.

Postulado XIII: Dados os ângulos $\angle ABC$, $\angle DEF$ e $\angle GHI$, temos $\angle ABC \equiv \angle ABC$ e, se $\angle ABC \equiv \angle DEF$ e $\angle ABC \equiv \angle GHI$, então $\angle DEF \equiv \angle GHI$.

Postulado XIV: (LAL) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle BAC \equiv \angle EDF$, então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Exercício 149: Dados $A-B-C$, $P-Q-R$, tais que $\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{PR}$, então $\overline{BC} \equiv \overline{QR}$.

Exercício 150: Dados $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, mostre que dado P, $A-P-B$, então existe um único ponto Q, tal que $C-Q-D$ e $\overline{AP} \equiv \overline{CQ}$.

Exercício 151: Mostre que cada linha tem infinitos pontos $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ tais que $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$. (Comece com dois pontos $A_0, A_1 \in \ell$, que existem pelo postulado II; obtenha A_2 e A_{-1} em ℓ, tais que $A_{-1}-A_0-A_1$ e $A_0-A_1-A_2$, e $\overline{A_{-1}A_0} \equiv \overline{A_0A_1} \equiv \overline{A_1A_2}$, usando o postulado IX e o postulado VI, para a existência das semi-retas necessárias, etc.)

Exercício 152: Mostre que suplementos de ângulos congruentes são congruentes. (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos.) Para isto, sejam $D-A-B$, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, $H-E-F$ e $G \notin \overleftrightarrow{EF}$, tais que $\angle BAC \equiv \angle FEG$. Mostre que $\angle DAC \equiv \angle HEG$. (Podemos escolher os pontos de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\overline{AC} \equiv \overline{EG}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{EH}$; por LAL nos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle EFG$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ e $\triangle EGH$, obtenha o resultado.)

Exercício 153: Mostre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos; use o exercício anterior.)

Exercício 154: Mostre que existem ângulos retos (isto é, congruentes a seus suplementares.) (Para isto, use a construção de perpendiculares, construindo um triângulo isósceles conveniente.)

Exercício 155: Mostre que cada ângulo admite uma bissetriz, isto é, dado $\angle AOB$, existe $C \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$, tal que $\angle AOC \equiv \angle BOC$. (Cuidado: aqui não temos medida de ângulos.)

(D) Postulado de Continuidade:

Postulado XV: Dada uma linha ℓ, suponha que X e Y são conjuntos não vazios de pontos de ℓ, tais que $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = \ell$, e para todos os pontos $A, B, C \in \ell$, se $A-B-C$ e $A, C \in X$ então $B \in X$ e se $A-B-C$ e $A, C \in Y$, então $B \in Y$. Então, neste caso, existe um ponto $O \in \ell$ e semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tais que $A-O-B$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OA}) \subset X$, $\mathsf{int}\,(\overrightarrow{OB}) \subset Y$ e $O \in X$ ou $O \in Y$.

Exercício 156: Mostre que para cada linha existe uma régua $f : \ell \to \mathbb{R}$, tal que, se $d(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$, então $d(P,Q) = d(R,S)$ se, e somente se, $\overline{PQ} \equiv \overline{RS}$. (Problema muito difícil.)

Solução e/ou Sugestão: Pelo exercício acima, conseguimos obter uma seqüência de pontos A_n, tais que $\overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_{n+1}}$; para tais pontos, definimos $f(A_n) = n$. Para cada $P \in \ell$, $P \notin \overrightarrow{A_0A_{-1}}$ e $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, definimos o ponto kP como sendo o ponto P_k, sendo que $P_0 = A_0$, $P_1 = P$, P_2 é tal que $P_0 - P_1 - P_2$ e $\overline{P_0P_1} \equiv \overline{P_1P_2}$, etc. Para definirmos $f(P)$, se para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $kP = A_n$, então definimos $f(P) = n/k$. No caso em que $kP \neq A_n$, para todo k e todo n, definimos $f(P) = r = \lim_{j\to\infty}(n_j/k_j)$, sendo que $k_j, n_j \to \infty$ são tais que $A_{n_j} - k_jP - A_{n_j+1}$ (por que tal coisa converge?). Com isto, pelo postulado XV e pela propriedade do supremo de números reais, definimos f uma bijeção entre $\overrightarrow{A_0A_1}$ e $[0, \infty[\subset \mathbb{R}$, etc.

Exercício 157: Mostre que existe uma medida de ângulos m tal que satisfaz o postulado do transferidor. (Aqui também usamos a propriedade do supremo de números reais. Também é muito difícil.)

Conclusão: A geometria absoluta e a geometria métrica com Pasch e LAL são equivalentes, ou seja, podemos provar os mesmos teoremas nas duas geometrias.

---

16. TEORIA DAS PARALELAS: Já vimos que tanto na geometria euclideana como na hiperbólica valem todos os postulados até agora enunciados (1 a 7, ou, I a XV). Também vimos que na geometria hiperbólica, dada uma linha ℓ e um ponto P fora de ℓ, existem mais de uma paralela a ℓ passando por P. Isto mostra que esta propriedade não pode ser demonstrada a partir dos postulados 1 a 7 (ou mesmo de I a XV). Este problema, que já preocupava os geômetras desde a Antigüidade, só foi resolvido no séc. XIX, com os trabalhos de Gauss, Lobatchevski e Bolyai, com a descoberta da geometria hiperbólica, em que não vale o postulado das paralelas. Vamos estudar aqui vários resultados conectados com este problema.

Lembramos que duas linhas ℓ_1 e ℓ_2 são **paralelas** se não têm pontos em comum. Lembramos também que os postulados 1 a 7 garantem a existência de paralelas. (Voltaremos a trabalhar com geometrias métricas com Pasch e LAL.)

Relembramos também a definição de um **quadrilátero de Saccheri**, que é uma quadrilátero $\boxed{\text{S}}ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, e os ângulos $\angle DAB$ e $\angle ADC$ são retos (ver o exercício 97, em que também foi provado que $\angle ABC \equiv \angle BCD$).

Estes quadriláteros foram as figuras principais do estudo do paralelismo desenvolvido pelo jesuíta italiano *Gerolamo Saccheri* (1667-1733) na tentativa de demonstrar o *quinto postulado* de Euclides. a partir dos outros. Este postulado é enunciado na forma: *dadas as linhas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, sejam $A - B - C$ em ℓ_1, $D - E - F$ em ℓ_2, B e E em ℓ_3 e A e D estão do mesmo lado de $\ell_3 = \overleftrightarrow{BE}$, se $m(\angle ABE) + m(\angle DEB) < 180$, então as linhas ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P do mesmo lado que A e D em relação à linha ℓ_3.* Muitos geômetras achavam que este enunciado era muito complicado (ou seja, não "auto evidente") para ser proposto como postulado e imaginavam ser possível demonstrá-lo a partir dos outros postulados de Euclides, ou seja, na linguagem de hoje, numa geometria métrica com Pasch e LAL. Houve várias supostas demonstrações que sempre falhavam no uso de alguma hipótese que na verdade era equivalente a este postulado. Em sua obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides justificado de toda falha), publicada em Milão em 1733, Saccheri também apresenta uma prova falha deste postulado. O que distingue esta obra é que existem muitos resultados corretos e úteis no desenvolvimento posterior das chamadas geometrias não euclideanas (principalmente a hiperbólica). A idéia de Saccheri era de supor que este postulado era falso e tentar daí provar alguma contradição. Ele partiu de quadriláteros de Saccheri $\boxed{\text{S}}ABCD$, e considerou **três hipóteses**, a saber, $\angle ABC$ é reto (a *hipótese do ângulo reto*), ou $\angle ABC$ é obtuso (a *hipótese do ângulo obtuso*), ou $\angle ABC$ é agudo (a *hipótese do ângulo agudo*). Ele então mostrou que a hipótese do ângulo reto era equivalente ao quinto postulado; a do ângulo obtuso era contraditória, mas do ângulo agudo teve muitas dificuldades para chegar a uma contradição. Estudiosos da obra de Saccheri acham que no final de sua obra ele "provou" o quinto postulado (numa gritante falha de argumentação, completamente fora da fineza dos argumentos anteriores), devido ao medo da censura da Igreja.

Posteriormente, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) também escreveu um trabalho sobre a teoria das paralelas em que aprofundou mais os resultados de Saccheri, mas também tentando provar o postulado por contradição. Por fim, os resultados de Nikolai I. Lobatchevskii (1793-1856) e Johann Bolyai (1802-1860), publicados em torno de 1824, introduziram a geometria hiperbólica, mostrando assim que o postulado das paralelas não pode ser provado a partir dos outros postulados da geometria euclideana.

Vamos explorar os resultados de Saccheri (ele provou mais de trinta proposições e alguns corolários), de Lambert, Bolyai e de Lobatchevskii, mas no nosso contexto moderno.

Lambert usou também um tipo de quadrilátero, chamado hoje de **quadrilátero de Lambert**, $\boxed{\text{L}}\, ABCD$, tal que $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ e $\overline{CD} \perp \overline{AD}$. As três hipóteses acima referem-se ao ângulo $\angle BCD$ para os quadriláteros de Lambert.

Exercício 158: Sejam ℓ_1 e ℓ_2 duas linha distintas, $\ell_1 \not\perp \ell_2$, $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$ uma régua, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = d(P, Q)$, sendo que $P \in \ell_2$, $Q \in \ell_1$, $\overline{PX} \perp \ell_1$ e $x = f(P)$. Mostre que h é função contínua.

Exercício 159: Mostre que se M é o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$, então $\Box ABCD$ é quadrilátero de Saccheri se, e somente se, $\Box AMNB$ é quadrilátero de Lambert.

Exercício 160: Mostre que os quadriláteros de Saccheri e de Lambert são quadriláteros convexos.

Exercício 161: Sejam M o ponto médio de $\overline{BC}$, $N \notin \overleftrightarrow{BC}$, tal que $\overline{MN} \perp \overline{BC}$, $\ell \ni N$, $\overline{MN} \perp \ell$, $A, D \in \ell$, tais que $\overline{AB} \perp \ell \perp \overline{DC}$. Mostre que $\Box ABCD$ é quadrilátero de Saccheri.

Exercício 162: (Saccheri, Prop. I) Dado o quadrilátero $\Box ABCD$, mostre que se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\angle BAD \equiv \angle ADC$, então $\angle ABC \equiv \angle BCD$. (Use LAL nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle DCA$ e, depois, LLL nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BCD$.)

Exercício 163: (Saccheri, Prop. II) Dado o quadrilátero $\Box ABCD$, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\angle BAD \equiv \angle ADC$, se $A - M - D$ e $B - N - C$, $\overline{AM} \equiv \overline{MD}$ e $\overline{BN} \equiv \overline{NC}$, mostre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e a $\overline{BC}$.

Exercício 164: (Saccheri, Prop. III e IV) Dado o quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}\, ABCD$ (com $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e os ângulos $\angle DAB$ e $\angle ADC$ são retos), seja $\alpha = m(\angle ABC)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $BC > AD$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $BC = AD$;

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $BC < AD$.

Exercício 165: (Variante do anterior) Dado o quadrilátero de Lambert $\boxed{\text{L}}\, ABCD$, seja $\alpha = m(\angle BCD)$. Usando as desigualdades geométricas convenientes, mostre que

(a) $\alpha < 90$ se, e só se, $AB < CD$;

(b) $\alpha = 90$ se, e só se, $AB = CD$;

(c) $\alpha > 90$ se, e só se, $AB > CD$.

Exercício 166: (Saccheri, Prop. V, VI e VII) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri e $\alpha = m(\angle ABC)$. Mostre que, se valer uma das hipóteses, $\alpha < 90$, ou $\alpha = 90$, ou $\alpha > 90$, então, para todo quadrilátero de Saccheri $\boxed{\text{S}}EFGH$ vale a mesma hipótese.

Solução e/ou Sugestão: Comece com a hipótese do ângulo reto. Seja $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri tal que $m(\angle ABC) = 90$. Sejam $P \in \overleftrightarrow{BC}$ e $Q \in \overleftrightarrow{AD}$ tais que $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Sejam $P_1, P_2 \in \overleftrightarrow{BC}$ e $Q_1, Q_2 \in \overleftrightarrow{AD}$ tais que $P_1 - C - P$, $\overline{CP_1} \equiv \overline{CP}$, $P_2 - B - P$, $\overline{AP_2} \equiv \overline{AP}$, $\overline{P_1Q_1} \perp \overleftrightarrow{AD} \perp \overline{P_2Q_2}$. Mostre que $\boxed{\text{S}}QPP_iQ_i$ (isto é, $\square QPP_iQ_i$ é de Saccheri), para $i = 1, 2$. Mostre que estes quadriláteros também satisfazem a hipótese do ângulo reto. Finalmente, sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ que satisfaz a hipótese do ângulo reto e $\boxed{\text{S}}EFGH$ um outro quadrilátero de Saccheri. Seja $\boxed{\text{S}}E'F'G'H'$ congruente a $\boxed{\text{S}}EFGH$, tal que $\overline{E'H'} \subset \overleftrightarrow{AD}$ o ponto médio de $\overline{E'H'}$ coincide com o ponto médio de $\overline{AD}$ e F', G' do mesmo lado que B e C em relação a $\overleftrightarrow{AD}$. Pode ser que $E' = A$, ou $E' - A - D - H'$, ou $A - E' - H' - D$, etc. Por exemplo, se $E' - A - D - H'$, sejam $K \in \overline{H'G'} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $L \in \overline{E'F'} \cap \overleftrightarrow{BC}$ (por que existem tais pontos?). Pelo argumento acima, temos que $\boxed{\text{S}}E'LKH'$ e que $\angle K \equiv \angle L$ são retos. Depois, use o mesmo argumento com $\boxed{\text{L}}MNG'H'$, sendo que M é o ponto médio de $\overline{E'H'}$ e N o ponto médio de $\overline{F'G'}$. (Faça os outros casos.)

Para o caso da hipótese do ângulo agudo, sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ tal que valha a hipótese $\alpha < 90$, M o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Pelo exercício anterior, $MN < CD$. Se $P \in \overleftrightarrow{BC}$, $P \neq N$, seja $Q \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Mostre que se $PQ \leq MN$ então existem $R \in \overleftrightarrow{BC}$ e $S \in \overleftrightarrow{BC}$ tais que $R \neq M$, $S \neq N$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overline{RS} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Conclua daí que $\boxed{\text{S}}ABCD$ tem que satisfazer a hipótese do ângulo reto. Portanto $MN < PQ$, etc.

Para o caso da hipótese do ângulo obtuso, faça o mesmo.

Exercício 167: (Saccheri, Prop. VIII) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, $G-A-B$, $H - A - C$, $\alpha = m(\angle ABC)$, $\beta = m(\angle DCA)$ e $\gamma = m(\angle GAH)$. Mostre que

(a) se $\alpha < 90$, então $\beta < \gamma$;

(b) se $\alpha = 90$, então $\beta = \gamma$;

(c) se $\alpha > 90$, então $\beta > \gamma$.

Exercício 168: (Saccheri, Prop. IX) Sejam $\boxed{\text{S}}ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, $\alpha = m(\angle ABC)$, $\beta = m(\angle DCA)$ e $\gamma = m(\angle DAC)$. Mostre que

(a) se $\alpha < 90$, então $\beta + \gamma < 90$;

(b) se $\alpha = 90$, então $\beta + \gamma = 90$;

(c) se $\alpha > 90$, então $\beta + \gamma > 90$.

Exercício 169: (Saccheri, Prop. X) Dados $A - B - C$ e D fora de $\overleftrightarrow{AB}$ e tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, mostre que $DC > DA$ se, e só se, $BC > BA$.

Exercício 170: (Saccheri, Prop. XIV) Mostre que que a hipótese do ângulo obtuso é contraditória, mostrando que para todo $\boxed{\mathrm{S}}ABCD$, $AD \leq BC$. (Para isto, sejam $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_1 = D$, $B_1 = C$, $A_n \in \overleftrightarrow{AD}$, $n \geq 2$, tais que $A_{n-1} - A_n - A_{n+1}$ e $\overline{A_nA_{n+1}} \equiv \overline{AD}$, B_n, $n \geq 2$, tais que B_n e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{B_nA_n} \equiv \overline{AB}$; mostre que $d(A_0, A_n) = nd(A, D) \leq 2\,d(AB) + n\,d(BC)$, usando n vezes a desigualdade triangular; fazendo $n \to \infty$ em $d(A, D) \leq d(B, C) + (2/n)d(A, B)$, conclua que $AD \leq BC$ e portanto não pode valer a hipótese do ângulo obtuso.)

Exercício 171: (Teorema de Saccheri) Dado o $\triangle ABC$ então mostre que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \leq 180$. (Suponha que $\overline{BC}$ é o maior lado do $\triangle ABC$; seja $B - P - C$, tal que $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ e seja Q do mesmo lado que A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $\boxed{\mathrm{S}}PAQB$; como $PB \leq AQ$, $\angle ABQ \geq \angle BAP$; portanto $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle Q) \leq 180$, etc.)

Dado um triângulo $\triangle ABC$, dizemos que o número real $\delta(\triangle ABC) = 180 - m(\angle A) - m(\angle B) - m(\angle C)$ é a **deficiência** de $\triangle ABC$; dado um quadrilátero convexo $\square ABCD$, dizemos que o número real $\delta(\triangle ABC) = 360 - m(\angle A) - m(\angle B) - m(\angle C) - m(\angle D)$ é a **deficiência** de $\square ABCD$

Exercício 172: Dados $\triangle ABC$ e $B - D - C$, mostre que $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle ACD)$. (Calcule cada termo e use que $\angle ADB$ e $\angle ADC$ são suplementares.)

Exercício 173: Dados $\square ABCD$ convexo e $C - E - D$, mostre que $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle BCE) + \delta(\square ABED)$. (Parecido com o anterior.)

Exercício 174: Dado $\square ABCD$ convexo, mostre que $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle BCD)$.

Exercício 175: (Saccheri, Prop. XV) Mostre que

(a) se existe um triângulo $\triangle ABC$ tal que $\delta(\triangle ABC) > 0$, então para todo triângulo $\triangle DEF$, vale $\delta(\triangle DEF) > 0$;

(b) se existe um triângulo $\triangle ABC$ tal que $\delta(\triangle ABC) = 0$, então para todo triângulo $\triangle DEF$, vale $\delta(\triangle DEF) = 0$.

Solução e/ou Sugestão: Suponhamos que o maior lado de $\triangle ABC$ seja $\overline{BC}$. Seja D tal que $B - D - C$ e $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Sejam G e H do mesmo lado que A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$ e tais que $\boxed{\mathrm{S}}BGAD$ e $\boxed{\mathrm{S}}CHAD$. Agora é só aplicar a Prop. IX de Saccheri (ver acima).

Exercício 176: (Saccheri, Prop. XVIII) Seja C fora do segmento $\overline{AB}$, mas na circunferência $\mathbb{C}$ tal que $\overline{AB}$ seja um diâmetro. Então

(a) $\angle ACB$ é reto se, e somente se, valer a hipótese do ângulo reto;

(b) $\angle ACB$ é agudo se, e somente se, valer a hipótese do ângulo agudo.

Solução e/ou Sugestão: Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e $r = d(A, M)$. Então $\mathbb{C}$ é a circunferência $\mathbb{C}_{M,r}$. Os triângulos $\triangle MAC$ e $\triangle MBC$ são isósceles (por quê?); $\angle MAC \equiv \angle MCA$ e $\angle MBC \equiv \angle MCB$. Temos que $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle MAC) + \delta(\triangle MBC)$. Como $m(\angle ACB) = m(\angle MCA) + m(\angle MCB)$, temos que $m(\angle ACB) = 90 - \delta(\triangle ABC)/2$. O resto segue da Prop. XV de Saccheri.

Exercício 177: (Saccheri, Prop. XIX e XX) Dado $\triangle ABC$, com $\angle C$ reto, seja M o ponto médio de $\overline{AB}$, $N \in \overline{AC}$ tal que $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ e $L \in \overleftrightarrow{MN}$ tal que $\overline{BL} \perp \overleftrightarrow{MN}$. Mostre que

(a) a hipótese do ângulo agudo implica que $AC < 2\,AN$ e $BC > 2\,MN$;

(b) a hipótese do ângulo reto implica que $AC = 2\,AN$ e $BC = 2\,MN$.

Solução e/ou Sugestão: Observe que $\boxed{\text{L}}\,NLBC$ e (por LAAo) $\triangle ANM \equiv \triangle BLM$. Portanto $LN = 2\,MN$. A Prop. XIV de Saccheri implica que $AC \leq 2\,AN$ e $BC \geq 2\,MN$ (por quê?) e os itens (a) e (b) seguem disto. (Faça os detalhes.)

Exercício 178: (Saccheri, Prop. XXI) Dados $r > 0$ e $\angle AOB$, mostre que existe $C \in \overrightarrow{OA}$ tal que $d(C, \overleftrightarrow{OB}) > r$. (Para isto, tome $A_n \in \overrightarrow{OA}$ tais que $A_0 = A$, $A_{n-1} - A_n - A_{n+1}$ e $\overline{A_n A_{n+1}} \equiv \overline{OA}$, $B_n \in \overleftrightarrow{OB}$ tais que $\overline{A_n B_n} \perp \overleftrightarrow{OB}$; use o exercício anterior para escolher algum dos A_n para ser o ponto C.)

Exercício 179: Mostre que, com a hipótese do ângulo agudo, se ℓ e ℓ' são linhas distintas e que têm uma perpendicular comum, então dado um número real $r > 0$, existe $P \in \ell'$, tal que $d(P, \ell') \geq r$. (Sejam $M \in \ell$, $N \in \ell'$ tais que $\ell \perp \overline{MN} \perp \ell'$; sejam $R \in \ell'$ e $S \in \ell$ tais que $R \neq N$ e $\overline{RS} \perp \ell$; seja $\ell'' \perp \ell'$ tal que $R \in \ell''$; use o exercício anterior para provar que existe $P \in \ell'$, tal que $d(P, \ell) \geq d(P, \ell'') > r$.)

Exercício 180: (Saccheri, Prop. XXXI) Mostre que dados o número real $r > 0$, a linha ℓ e $A \notin \ell$, existe ℓ' contendo A e com perpendicular comum com ℓ, tal que $d(\ell, \ell') \leq r$, sendo que $d(\ell, \ell') = d(M, N)$, para $M \in \ell$, $N \in \ell'$ tais que $\ell \perp \overline{MN} \perp \ell'$. (Construa ℓ'' tendo perpendicular comum com ℓ e tal que $d(\ell, \ell'') \leq r$; ache $A' \in \ell''$ tal que $d(A', \ell) = d(A, \ell)$, usando o exercício anterior (como?); construa a figura conveniente e congruente à construída para terminar o exercício.)

Exercício 181: (Saccheri, Prop. XXIX, XXXII) Com a hipótese do ângulo agudo, mostre que dados ℓ, $A \notin \ell$ e $B \in \ell$, com $\overline{AB} \perp \ell$, existe $\alpha \in]0, 90[$ tal que para todo ponto $D \neq A$

(a) se $0 < m(\angle DAB) < \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ intersecta ℓ;

(b) se $m(\angle DAB) = \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ e ℓ não se intersectam e não têm perpendicular comum;

(c) se $\alpha < m(\angle DAB) \leq 90$, $\overleftrightarrow{AD}$ e ℓ não se intersectam e têm perpendicular comum.

Solução e/ou Sugestão: Seja $\alpha = \inf\{\beta \leq 90 : m(\angle DAB) = \beta,\ \overleftrightarrow{AD}$ e ℓ têm perpendicular comum$\}$. Tal α existe, pois o conjunto do lado direito da igualdade é limitado inferiormente e não vazio.

Observe que se $D \in \ell$ e $m(\angle DAB) = \beta_1$, então se $D' \in \ell$ e $D' - D - B$, então $m(\angle D'AB) > \beta_1$, portanto se $m(\angle DAB) = \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ não intersecta ℓ (por quê?).

Se $m(\angle DAB) = \beta_2 < 90$ e $\overleftrightarrow{AD'}$ e ℓ têm perpendicular comum, sejam $R \in \ell$ e $S \in \overleftrightarrow{AD'}$, tais que $\boxed{\text{S}}RSAB$. Note que $m(\angle SAB) = \beta_2$. Sejam $T \in \ell$ e $U \in \overleftrightarrow{AD'}$ tais que $T - R - B$ e $\overline{TU} \perp \ell$. Então $TU > AB$ (por quê?). Seja $V \in \overline{TU}$ tal que $\overline{TV} \equiv \overline{AB}$. Então $\boxed{\text{S}}TVAB$ e $m(\angle VAB) < \beta_2$. Portanto, se $m(\angle DAB) = \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ e ℓ não têm perpendicular comum.

Portanto, valem (a), (b) e (c) (por quê?).

Exercício 182: (Saccheri, Prop. XXV) Mostre que no caso (b) do exercício anterior, dado o número real $r > 0$, existe $P \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que $d(P, \ell) < r$. (Ache uma linha $\ell' = \overleftrightarrow{AD'}$, tal que $\alpha < m(\angle D'AB) < 90$ e $d(\ell', \ell) \leq r$ e ache $P \in \overleftrightarrow{AD}$ tal que $d(P, \ell) < d(\ell', \ell)$.)

Observação: Tal número α é chamado de **ângulo de paralelismo** da linha ℓ e do ponto A. Pelo que foi exposto, podemos concluir que α só depende de $d(A, \ell)$. As linhas $\overleftrightarrow{AD}$ tais que $m(\angle DAB) = \alpha$ são chamadas de **paralelas assintóticas** a ℓ (pois elas "tendem a ℓ") e as linhas $\overleftrightarrow{AD}$ tais que $90 \geq m(\angle DAB) > \alpha$ são chamadas de **hiperparalelas** a ℓ.

Os trabalhos de Lambert, Lobatchevskii e Bolyai complementam estes resultados com o dos exercícios seguintes.

Exercício 183: Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dados $A - B - D$, $A - C - E$, tais que $AD = 2\,AB$, $\overline{CB} \perp \overline{AD}$ e $\overline{ED} \perp \overline{AD}$, então vale $\delta(\triangle ADE) > 2\,\delta(\triangle ABC)$.

Exercício 184: Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dado $\angle AOB$ agudo, existe $\ell \perp \overrightarrow{OA}$ tal que ℓ não intersecta $\overrightarrow{OB}$. (Suponha que não ocorra; construa uma seqüência de triângulos $\triangle A_n B_n C_n$, tais que $\delta(\triangle A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}) > 2\,\delta(\triangle A_n B_n C_n)$ e chegue numa contradição.)

Exercício 185: Supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que, dado $0 < \alpha < 90$, existem ℓ e $A \notin \ell$ tais que α é o ângulo de paralelismo de ℓ e A. (Comece com $\angle AOB$ medindo α, use o exercício anterior para obter $\ell_1 \perp \overrightarrow{OA}$ com $\ell_1 \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing$; seja $d_0 = \inf\{d(A, \ell') : \ell' \perp \overrightarrow{AO}$ e $\ell' \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing\}$; mostre que se ℓ é tal que $\ell \perp \overrightarrow{AO}$ e $d(A, \ell) = d_0$, então α é o ângulo de paralelismo de ℓ e A.)

Exercício 186: (A função crítica de Lobatchevskii) Seja $\Pi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ a função $\Pi(d) = \alpha$, sendo que existem ℓ e A tais que $d(A, \ell) = d$ e α é o ângulo de paralelismo de ℓ e A. Mostre que

(a) se existe $d > 0$ tal que $\Pi(d) = 90$, então Π é constante (igual a 90);

(b) supondo a hipótese do ângulo agudo, mostre que Π é estritamente decrescente e sua imagem é o intervalo $]0, 90[$ (e, portanto, Π é uma função contínua, chamada de função crítica de Lobatchevskii).

Exercício 187: Na geometria hiperbólica, quais as relações de paralelismo assintótico ou hiperparalelismo entre ℓ_1, $\ell_2, \ell_{0,1}$ e $\ell_{-1,2}$?

---

17. Formas equivalentes do postulado das paralelas:

Vamos provar várias formas equivalentes do chamado postulado das paralelas. É possível mostrar que toda proposição que pode ser provada com este postulado, mas não sem ele, na verdade é equivalente a este postulado. Por exemplo, toda a teoria de semelhança de triângulos depende deste postulado e, portanto, todas as proposições desta teoria serão equivalentes ao postulado.

Exercício 188: Mostre que são equivalentes

(a) (O Postulado de Euclides) Dados $A, B \in \ell_1$, $C, D \in \ell_2$ e $B, C \in \ell_3$, tais que A e D estão do mesmo lado de ℓ_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então ℓ_1 e ℓ_2 se encontram num ponto P no mesmo lado que A em relação a ℓ_3.

(b) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 29) Se A e D são pontos do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, então $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$.

(c) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 30) Para todas as linhas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3, se ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3, então ℓ_1 é paralela a, ou coincide com, ℓ_3.

(d) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 31: O Postulado de Playfair) Dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(e) Existem uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ.

(f) (Euclides, *Elementos*, Livro I, Prop. 32) Para todo $\triangle ABC$ vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(g) Existe um $\triangle ABC$ tal que vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180$.

(h) Todo quadrilátero de Saccheri é um **retângulo** (isto é, todos seus ângulos internos são retos).

(i) Existe um retângulo.

(j) Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.

(k) Para todo quadrilátero convexo $\square ABCD$, vale $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(l) Existe um quadrilátero convexo $\square ABCD$, tal que $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) + m(\angle D) = 360$.

(m) (Teorema de Tales) Se $C \notin \overline{AB}$ mas C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, então $\angle ACB$ é reto.

(n) Se $\angle ACB$ é reto, então C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(o) Existem A, $B \neq A$ e $C \notin \overline{AB}$ tais que $\angle ACB$ é reto e C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

(p) Se $C \notin \overline{AB}$ mas A, B e C estão numa circunferência de centro O e O e C estão do mesmo lado em relação a $\overleftrightarrow{AB}$, então $m(\angle AOB) = 2\, m(\angle ACB)$.

Solução e/ou Sugestão: As equivalências entre (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l) e (m) e (n) já foram provadas anteriormente (onde?) e as implicações (d) $\Rightarrow$ (e), (k) $\Rightarrow$ (l), (m) $\Leftrightarrow$ (n) $\Rightarrow$ (o) são fáceis (verifique).

(a) $\Rightarrow$ (b): se A e D são pontos do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, por (a), $m(\angle ABC)+m(\angle DCB) \geq 180$. Mas se $m(\angle ABC)+m(\angle DCB) > 180$ seus suplementares satisfazem a hipótese de (a) e, portanto $\overleftrightarrow{AB}$ não pode ser paralela a $\overleftrightarrow{CD}$. Portanto $m(\angle ABC)+m(\angle DCB) = 180$.

(b) $\Rightarrow$ (c): suponhamos que ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 sejam três linhas distintas, tais que ℓ_1 é paralela a ℓ_2 e ℓ_2 é paralela a ℓ_3. Sejam $B \in \ell_1$, $C \in \ell_2$ e $E \in \ell_3$ distintos e colineares (por que existem tais pontos?). Então ou $B - C - E$, ou $B - E - C$, ou $C - B - E$. Trataremos apenas o caso em que $B - C - E$, sendo os outros análogos. Sejam $A \in \ell_1$, $D \in \ell_2$ e $F \in \ell_3$ do mesmo lado em relação a $\overleftrightarrow{BC}$. Por (b), $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) = 180$ e $m(\angle DCE) + m(\angle FEC) = 180$, e como $m(\angle DCB) + m(\angle DCE) = 180$, $m(\angle ABC) + m(\angle FEC) = 180$, ou seja, ℓ_1 é paralela a ℓ_3 (por quê?).

(c) $\Rightarrow$ (d): sabemos que, dada uma linha ℓ e um ponto $P \notin \ell$, existe pelo menos uma $\ell' \ni P$ paralela a ℓ, por exemplo, se $Q \in \ell$ é tal que $\overline{PQ} \perp \ell$, podemos tomar $\ell' \perp \overline{PQ}$ e $P \in \ell'$. Neste caso, se $\ell'' \ni P$ não é perpendicular a $\overline{PQ}$, então, por (c), ℓ'' não pode ser paralela a ℓ (por quê?). Portanto ℓ' é a única paralela a ℓ e contendo P.

(d) $\Rightarrow$ (a): Sejam A e D pontos do mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$, e suponha que $m(\angle ABC)+m(\angle DCB) < 180$. Por (d), $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ não podem ser paralelas (por quê?) e portanto se encontram no mesmo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ em que ocorrem estes angulos alternos internos (por quê?).

(e) $\Rightarrow$ (i): sejam ℓ e $P \notin \ell$, tal que existe uma única $\ell' \ni P$ paralela a ℓ e seja $Q \in \ell$ tal que $\overline{PQ} \perp \ell$. Seja $R \in \ell$, $R \neq Q$ e seja S tal que $\boxed{\mathrm{S}}QPSR$. Então $\overleftrightarrow{PS}$ é paralela a ℓ e por (e), $\boxed{\mathrm{S}}QPSR$ é um retângulo (por quê?).

(h) $\Rightarrow$ (d): parecido com o caso (e) $\Rightarrow$ (i). (Faça.)

(o) $\Rightarrow$ (g): Se O é o ponto médio de $\overline{AB}$, compare os ângulos de $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ e $\triangle ABC$.

(f) $\Rightarrow$ (p) $\Rightarrow$ (g): compare os ângulos de $\triangle ACB$ e $\triangle AOB$.

Exercício 189: (Semelhança de triângulos) Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ e $\angle C \equiv \angle F$ são ditos **semelhantes**, em símbolos, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Mostre que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Temos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF = 1$.

Se $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$ e $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l), que é equivalente ao exercício 189 (k).

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 1$. Vamos mostrar que $AB/DE = AC/DF = BC/EF = r$. Escreva $r = m/n$, e sejam $A_0 = A$, $C_0 = A$, $A_{k+1} \in \overrightarrow{AB}$, tal que $A_{k-1} - A_k - A_{k+1}$ e $d(A_k, A_{k+1}) = (1/n)d(A, B)$, $C_{k+1} \in \overrightarrow{AC}$, tal que $\angle AA_kC_k \equiv \angle ABC$ (por que existem tais pontos?). Então $\triangle A_i A_{i+1} C_{i+1} \sim \triangle ABC$ (por quê?). Por indução em n, mostre que $A_k A / A_1 A = C_k A / C_1 A = k$.

Suponha que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $AB/DE = r \notin \mathbb{Q}$. Aproxime r por $r_n \in \mathbb{Q}$ e use a parte acima.

Exercício 190: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Existem dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes e não congruentes.

(b) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$ se, e somente se, $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

(c) Para todo par de triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\angle A \equiv \angle D$, $\angle B \equiv \angle E$, então $\angle C \equiv \angle F$.

(d) **(Homotetia)** Dados $\triangle ABC$, um ponto O e $r > 0$, sejam $D \in \overrightarrow{OA}$, $E \in \overrightarrow{OB}$ e $F \in \overrightarrow{OC}$ tais que $OD = r\,OA$, $OE = r\,OB$ e $OF = r\,OC$. Então $AB/DE = AC/DF = BC/EF$.

Solução e/ou Sugestão: Suponha (a) e sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ triângulos semelhantes e não congruentes. Construindo cópia congruente de $\triangle DEF$, podemos supor que $A = D$, $E \in \overrightarrow{AB}$ e $F \in \overrightarrow{AC}$, são tais que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$. Então $\square BCFE$ é convexo e a soma de seus ângulos é 360 (por quê?). Ou seja, (a) implica o exercício 189 (l).

(c) $\Rightarrow$ (a): dado $\triangle ABC$, seja D um ponto tal que $A - D - B$, e seja $E \in \overline{AC}$, tal que $\angle ADE \equiv \angle ABC$ (por que existe tal ponto?). Por (c), $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, mas $\triangle ABC \not\equiv \triangle ADE$.

Pelo exercício anterior, (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) são simples (faça).

Exercício 191: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) Se $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, então $\ell_1 \cap \ell_4$ contém pelo menos um ponto.

(b) Se $\angle AOB$ é agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, então ℓ intersecta $\overrightarrow{OB}$.

(c) Se ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes e distintas e se $\ell_3 \perp \ell_1$ e $\ell_4 \perp \ell_2$, então ℓ_3 e ℓ_4 são concorrentes.

(d) Existe um ângulo $\angle AOB$ agudo, tal que, para todo $P \in \mathsf{int}\,(\angle AOB)$, existe linha $\ell \ni P$ que intersecta ambos os lados do ângulo, mas não o vértice.

(e) Para todo $\triangle ABC$, as suas mediatrizes são concorrentes.

(f) Todo triangulo pode ser inscrito numa circunferência.

(g) Para todo $\triangle ABC$, as suas alturas são concorrentes (no ponto chamado de **ortocentro** de $\triangle ABC$.

Solução e/ou Sugestão: Primeiro provaremos que o Teorema de Tales (exercício 189 (m)) implica (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$, $\ell_3 \perp \ell_4$, $A \in \ell_2 \cap \ell_3$, $M \in \ell_1 \cap \ell_2$, $N \in \ell_3 \cap \ell_4$, $B \in \overrightarrow{AM}$, $A - M - B$ e $AM = MB$, $C \in \overrightarrow{AN}$, $A - N - C$ e $AN = NC$. Então $\triangle ABC$ é retângulo em $\angle A$. Pelo Teorema de Tales, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$. Se $O \in \overline{BC}$ é o ponto médio, este também é o centro da tal circunferência. Considerando os triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OAC$, que são isósceles, ℓ_1 e ℓ_4 encontram-se em O (por quê?).

(a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que não vale (b), ou seja, existe um ângulo $\angle AOB$ agudo e $O \notin \ell \perp \overrightarrow{OA}$, tal que ℓ não intersecta $\overrightarrow{OB}$. Podemos supor que $A \in \ell$. Sejam $C - O - A$, $CO = OA$, e D do mesmo lado que B em relação a $\overleftrightarrow{OA}$. Seja $\ell' \perp \overleftrightarrow{OA}$ e $C \in \ell'$. Então ℓ' não encontra $\overrightarrow{OD}$ (por quê?). Se $G \in \ell$ e $H \in \ell'$ são tais que $\boxed{\text{S}}\,AGHC$, então vale a hipótese do ângulo agudo (por quê?). Usando o exercício 186, podemos então encolher um ângulo $\angle A'O'B'$, tal que $m(\angle A'O'B') \leq 45$ e tal que existe $\ell'' \perp \overrightarrow{O'A'}$ que não encontra $\overrightarrow{O'B'}$. Usando o exercício 185, podemos concluir que não vale (a).

(b) $\Rightarrow$ (a): Suponha que não vale (a). Sejam $\ell_1 \perp \ell_2$, $\ell_2 \perp \ell_3$ e $\ell_3 \perp \ell_4$, mas $\ell_1 \cap \ell_4 = \varnothing$. Podemos supor que se $A \in \ell_1 \cap \ell_2$, $B \in \ell_2 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_3 \cap \ell_4$, então $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ (por quê?). Portanto, se $D \in \mathsf{int}\,(\angle ABC)$ e $m(\angle ABD) = 45$, então $\ell_3 \cap \overrightarrow{BD} = \varnothing$ (por quê?), e portanto não vale (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): podemos supor que $A \in \ell_1 \cap \ell_2$ e que A não esteja nem em ℓ_3 e nem em ℓ_4. Sejam $B \in \ell_1 \cap \ell_3$ e $C \in \ell_2 \cap \ell_4$. Se $m(\angle BAC) = 90$ então (a) implica (c). Se $m(\angle BAC) > 90$ tanto ℓ_3 como ℓ_4 encontram a bissetriz de $\angle BAC$, por (b). Conclua que $\ell_3 \cap \ell_4 \neq \varnothing$. Se $m(\angle BAC) < 90$, por (b), ℓ_3 encontra $\overrightarrow{AC}$, formando um ângulo agudo. Portanto deve encontrar ℓ_4. (Faça os detalhes.)

(d) $\Rightarrow$ (b): Se não valesse (b), como acima exposto, valeria a hipótese do ângulo agudo, portanto, dado $\angle AOB$ agudo, existe ℓ tal que $\alpha = m(\angle AOB)/2$ é o ângulo de paralelismo de ℓ e O. Isto implica que se $\ell' \ni O$ e $\ell' \cap \overrightarrow{OA} \neq \varnothing$, então $\ell' \cap \overrightarrow{OB} = \varnothing$ (por quê?).

(b) $\Rightarrow$ (d), (c) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f) e (c) $\Leftrightarrow$ (g) são simples (faça).

Exercício 192: Mostre que os seguintes enunciados também são equivalentes ao postulado das paralelas:

(a) (Teorema de Pitágoras) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, temos $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

(b) (Lei dos Cossenos) (Dado $\angle AOB$, se for reto, definimos $\cos(\angle AOB) = 0$, se for agudo, fazemos a construção $\triangle POR$, com $d(O,R) = 1$ e $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ e definimos $\cos(\angle AOB) = d(O,P)$; se $\angle AOB$ for obtuso, definimos $\cos(\angle AOB) = -\cos(\angle BOC)$, sendo $\angle BOC$ o suplementar de $\angle AOB$.) A Lei dos Cossenos diz: dado $\triangle ABC$, temos $AB^2 - 2\,AB\,AC\,\cos(\angle BAC) + AC^2 = BC^2$.

(c) Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto, seja $D \in \overline{BC}$, tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, então $AD^2 = BD \cdot DC$.

(d) (Euclides, Prop. I-48) Dado $\triangle ABC$, se $AB^2 + AC^2 = BC^2$, então $\angle A$ é reto.

Solução e/ou Sugestão: (b) $\Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ (c) é simples. (Faça.)

(a) implica um caso da recíproca do Teorema de Tales (exercício 189 (o)). Sejam $B - D - C$, $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$, seja A fora de $\overline{BC}$ e tal que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ e $\angle BAC$ seja reto (por que existe tal ponto?). Então $\triangle ABC$ é isósceles (prove que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$) e retângulo em $\angle A$. Por (a), $2\,AB^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4\,BD^2$. No $\triangle ADB$, que é retângulo em $\angle D$, por (a), $AB^2 = AD^2 + BD^2$, donde segue que $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$, ou seja, A está na circunferência de diâmetro $\overline{BC}$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Das equivalências do exercício 190, concluímos que se $\triangle ABC$ tem $\angle A$ reto, então $\cos(\angle B) = AB/BC$. Vamos mostrar que isto implica (b). Para isto, dado $\triangle ABC$, qualquer, com $\angle A$ agudo; seja $D \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que $\overline{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$. Usando (a) nos triângulos convenientes, obtemos (b).

(a) $\Rightarrow$ (d): Seja D tal que $\angle CAD$ é reto e $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. Por (a), $AB^2 + AD^2 = BD^2$, ou seja $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$. Por LLL, $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ e, portanto $\angle BAC$ é reto.

(d) $\Rightarrow$ (a): Dado $\triangle ABC$, com $\angle A$ reto. Seja $d = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. Então $d < AB + AC$ e, portanto existe um triângulo $\triangle DEF$ tal que $DE = AB$, $DF = AC$ e $d = d(E, F)$. Por (d), D é reto. Por LAL, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Portanto $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Para terminar as equivalências, mostre que o exercício 191 (b) implica (d).

---

18. Mais construções com régua e compasso:

A partir de agora assumimos o postulado das paralelas.

Postulado 8: Dada uma linha ℓ e um ponto A fora de ℓ, existe uma única linha $\ell' \ni A$ paralela a ℓ.

Com isto, valem todas as proposições equivalentes a este postulado, citados na seção anterior.

Dado um segmento $\overline{OE}$ de tamanho 1, dizemos que um ponto A é construtível (com régua e compasso) se o segmento $\overline{OA}$ for obtido de $\overline{OE}$ com um número finito de operações de intersecção de linhas e/ou circunferências determinadas por pontos construtíveis. (Uma circunferência é determinada por seu centro e por um ponto dela.) Um ângulo $\angle AOB$ é construtível se O é construtível e existem pontos construtíveis C e D tais que $\angle AOB = \angle COD$.

Na geometria analítica, dizemos que o ponto $A = (a, b)$ é construtível se for construtível a partir de $\overline{OE}$, sendo que $O = (0, 0)$ e $E = (1, 0)$.

Vamos estudar primeiramente uma caracterização algébrica de construções com régua e compasso e depois veremos algumas construções tiradas dos *Elementos* de Euclides.

Exercício 193: Mostre que na geometria analítica, o ponto $(0, 1)$ é construtível.

Exercício 194: Mostre que na geometria analítica, o ponto $A = (a, b)$ é construtível se, e somente se, o ponto (b, a) é construtível.

Exercício 195: Mostre que na geometria analítica, o ponto $A = (a, b)$ é construtível se, e somente se, os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$ são construtíveis.

Exercício 196: Mostre que na geometria analítica o ângulo $\angle AOB$ é construtível se, e somente se, o ponto $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ é construtível, sendo $\alpha = \pi\, m(\angle AOB)/180$ (medida de $\angle AOB$ em radianos).

Podemos reduzir o problema de determinar o que é construtível na geometria analítica simplesmente dizendo quais elementos de $\mathbb{R}$ podem ser coordenadas de pontos construtíveis.

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é construtível se for coordenada de um ponto construtível.

Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é um **corpo** se $1 \in K$ e, para todo $a, b \in K$, $a \pm b \in K$, $ab \in K$ e se $a \neq 0$, $1/a \in K$. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é um corpo e se $K \subset \mathbb{R}$ é corpo, então $\mathbb{Q} \subseteq K$ (verifique isto). Um polinômio $p(x)$ com coeficientes num corpo K é **irredutível (sobre K)** se não puder ser fatorado como produto de dois polinômios não constantes e com coeficientes em K. Dados um corpo K e um polinômio $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ irredutível sobre K, suponha que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $p(x)$. Definimos $K(\alpha)$ como o conjunto de todos os números da forma $b_1\alpha^{n-1} + b_2\alpha^{n-2} + \ldots + b_n$, com $b_i \in K$.

Exercício 197: Dados um corpo K e um polinômio $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ irredutível sobre K e $\alpha \in \mathbb{R}$, uma raiz de $p(x)$, mostre que $K(\alpha)$ é um corpo.

Exercício 198: Dados um corpo K e um polinômio $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ irredutível sobre K e $\alpha \in \mathbb{R}$, uma raiz de $p(x)$, mostre que se $b_1\alpha^{n-1} + b_2\alpha^{n-2} + \ldots + b_n = 0$ para $b_i \in K$, então todos os $b_i = 0$. (Neste caso, dizemos que os números $1 = \alpha^0$, α, α^2, ..., α^{n-1} são **linearmente independentes sobre** K.)

Dados corpos $K \subset L \subseteq \mathbb{R}$, se existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ linearmente independentes sobre K e tais que todo elemento de L é da forma $\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$, com $a_i \in K$, então chamamos o conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de **base** de L sobre K e o número n de **dimensão** de L sobre K e é denotado por $[L : K] = n$. Se $L_1 = K(\alpha_1)$, ..., $L_n = L_{n-1}(\alpha_n)$, então denotamos $L_n = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Exercício 199: Mostre que se L tem base sobre K com n elementos, então toda base de L sobre K tem n elementos.

Exercício 200: Mostre que se L tem base sobre K com n elementos e F tem base sobre L com m elementos, então F tem base sobre K com mn elementos. (Tome o produto dos elementos das duas bases, dois a dois.) Ou seja, $[F : K] = [F : L][L : K]$.

Exercício 201: Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ são construtíveis, então $a + b$, $a - b$, ab e a/b (se $b \neq 0$) são construtíveis.

Exercício 202: Mostre que se $a > 1$ é construtível então $\sqrt{a}$ é construtível. (Para isto, construa um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $(a + 1)/2$ e um cateto medindo $(a - 1)/2$.)

Exercício 203: Mostre que se $0 < a < 1$ é construtível então $\sqrt{a}$ é construtível.

Exercício 204: Mostre que se $a \in \mathbb{Q}$, então a é construtível.

Exercício 205: Mostre que $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é construtível}\}$ é corpo.

Exercício 206: Mostre que $a \in \mathbb{K}$ se, e somente se, existem $a_1 \in \mathbb{Q}$, $a_1 > 0$, $a_{i+1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1})$, $a_{i+1} > 0$, $0 < i < n$, e $a = a_n$. Portanto, neste caso, tomando o menor n possível, $[\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) : Q] = 2^n$.

Solução e/ou Sugestão: Suponha que $a \in \mathbb{R}$ seja construtível e que $a \notin \mathbb{Q}$. Mostre que existe a seqüência $a_0, \ldots, a_n$ acima usando intersecções de circunferências e linhas, etc, o que significa que temos que resolver equações de segundo grau. Os coeficientes destas equações dependem das equações das retas e circunferências envolvidas.

A recíproca é simples. (Faça.)

Exercício 207: Mostre que se o polinômio $p(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ com coeficientes racionais não tem raiz racional, então suas raízes não são construtíveis. (Para isto, mostre que se α é uma raiz de $p(x)$, então $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$; se fosse construtível, estaria em algum corpo L tal que $[L:\mathbb{Q}]$ seria uma potência de 2; etc.) Mostre que um ângulo de 20 graus não é construtível.

Agora vamos estudar algumas construções com régua e compasso que valem na geometria euclideana (e só nela), como expostos nos *Elementos* de Euclides, nos Livros III e IV. Para isto, começamos com algumas propriedades de circunferências (dos Livros II e III).

Observação: Todas as construções no resto desta seção são com régua não graduada e compasso. Lembramos que um **polígono regular** é um polígono convexo com todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Exercício 208: Dado o segmento $\overline{AB}$, determine (com régua e compasso) $C\in\overline{AB}$, tal que $AC^2=AB\cdot CB$. (Para isto, construa um segmento $\overline{AD}\perp\overline{AB}$, tal que $AB=2\,AD$, e E, tal que $D-A-E$, e $\overline{DE}\equiv\overline{BD}$; seja $A-C-B$, tal que $\overline{AC}\equiv\overline{AE}$; mostre que este é o ponto procurado.)

Exercício 209: Dados $A,B\in\mathbb{C}_{C,r}$ e $A-D-B$, mostre que $AD\cdot DB=r^2-CD^2$. (Use o Teorema de Pitágoras nos triângulos convenientes.)

Exercício 210: Dados $A,B,Q\in\mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A-B-P$, mostre que são equivalentes:

(a) $AP\cdot BP=PQ^2$;

(b) $\overleftrightarrow{PQ}$ é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$.

Exercício 211: Mostre que se $\square ABCD$ é convexo e $A,B,C,D\in\mathbb{C}_{P,r}$, então $m(\angle A)+m(\angle C)=m(\angle B)+m(\angle D)=180$. (Para isto, mostre que $\angle DAC\equiv\angle DBC$, $\angle CAB\equiv\angle CDB$, etc.)

Exercício 212: Dados $A,B,Q\in\mathbb{C}_{C,r}$ e P no exterior de $\mathbb{C}_{C,r}$, tais que $A-B-P$ e $\overleftrightarrow{PQ}$ é tangente a $\mathbb{C}_{C,r}$, mostre que $\angle PQB\equiv\angle BAQ$. (Para isto, considere primeiro o caso em que $\overline{AQ}$ é um diâmetro e depois use o exercício anterior, no caso genérico.)

Exercício 213: Construir um triângulo isósceles cujos ângulos da base medem o dobro do terceiro ângulo. Para isto, dado o segmento $\overline{AB}$, ache C tal que $A-C-B$ e $AC^2=AB\cdot CB$; seja $D\in\mathbb{C}_{A,d(A,B)}$, tal que $d(A,C)=d(B,D)$; mostre que o triângulo procurado é $\triangle ABD$. (Para esta última afirmação, seja $\mathbb{C}_{O,s}$ a circunferência circunscrita ao $\triangle ABQ$; mostre que $\angle PQB\equiv\angle BAQ$, $\angle APQ\equiv\angle AQP$, $\angle PBQ\equiv\angle BPQ$ e, portanto $\angle AQB\equiv\angle BAQ$, etc.)

Exercício 214: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os vértices na circunferência) é construtível. (Construa primeiro um triângulo isósceles com ângulos da base medindo 72, $\triangle RST$, inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$; mostre que a base deste triângulo é o lado do pentágono procurado.)

Exercício 215: Dada uma circunferência $\mathbb{C}_{P,r}$, mostre que um pentágono regular circunscrito a $\mathbb{C}_{P,r}$ (todos os lados são tangentes a $\mathbb{C}_{P,r}$).

Exercício 216: Mostre que um hexágono regular de lado construtível dado é construtível.

Exercício 217: Mostre que um polígono regular de 15 lados inscrito em $\mathbb{C}_{P,r}$ é construtível. (Inscrever $\triangle ABC$ equilátero e um pentágono regular com um dos vértices A, etc.)

Vamos finalizar com alguns problemas mais complicados, resolvidos no Séc. XIX. (Se necessário, consulte a apostila "Introdução à teoria dos grupos e à teoria de Galois" de Paulo A. Martin, Publicações do IME-USP.)

Atenção: Estes problems não caem em prova.

Exercício 218: (K. F. Gauss, Séc. XIX) Mostre que um polígono regular de 17 lados é construtível.

Exercício 219: Mostre que se um polígono regular de n lados é construtível, então um polígono regular de $2n$ lados é construtível.

Exercício 220: Mostre que polígonos regulares de 7, 9, 11, 13 e 15 lados não são construtíveis.

FIM - UFA!