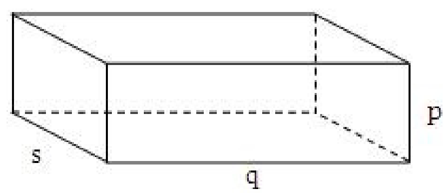
MAT1514 – Matemática na Educação Básica

TG7 – Uma Introdução ao Cálculo de Volumes
Gabarito

1. Demonstre que o volume de um bloco retangular cujas medidas das arestas são números racionais é o produto das três dimensões.

Resposta:
Seja um bloco retangular como abaixo:



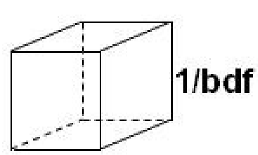
Temos que p, q e s ∈ Q, portanto podem ser expressos sob a forma de frações:

$$p = \frac{a}{b}, \quad q = \frac{c}{d}, \quad s = \frac{e}{f}$$

Podemos converter p, q e s em frações de mesmo denominador:

$$p = \frac{a.d.f}{b.d.f}, \quad q = \frac{c.b.f}{b.d.f}, \quad s = \frac{e.b.d}{b.d.f}$$

Agora podemos dividir as arestas em partes de $\frac{1}{b.d.f}$ formando cubinhos com este comprimento de lado.



Temos que a quantidade de cubinhos deste tipo que formam um cubo unitário é $b^3d^3f^3$. Logo se dividirmos a quantidade de cubinhos deste tipo que temos dentro do bloco por $b^3d^3f^3$ obtemos o volume do bloco, pois cada $b^3d^3f^3$ bloquinhos representam uma unidade de volume.

A quantidade Q de cubinhos necessários para cobrir todo o bloco é a multiplicação dos numeradores das frações:

$$Q = (a.d.f).(c.b.f).(e.b.d) = b^2.d^2.f^2.(a.c.e)$$

Portanto, se dividirmos Q por $b^3d^3f^3$ obteremos o volume do bloco:

$$V = \frac{b^2.d^2.f^2.(a.c.e)}{b^3.d^3.f^3} = \frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f} = p.q.s$$

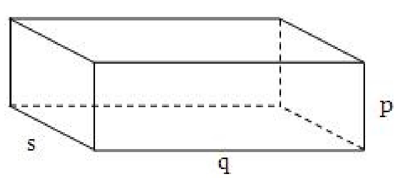
Assim, podemos concluir que o volume do bloco retangular é a multiplicação das suas três dimensões (p,q,s), quando as suas arestas são números racionais.

---------- // ----------

2. Mostre que o volume de qualquer bloco retangular é o produto de suas dimensões.

<u>Resposta:</u>

Seja o bloco retangular como o abaixo:



Com $p, q, s \in R_{+}^{*}$

Pelo teorema fundamental da proporcionalidade:

Dado $h \in R_+^*$ e o volume do bloco V(p, q, s), temos:

V(p, q, s) = h.(p, q, s) = (h.p, q, s) = (p, h.q, s) = (p, q, h.s).

Podemos, então, tomar h=1:

V(p, q, s) = 1.(p, q, s) = (1.p, q, s) = p.(1, q, s) = p.(1, 1.q, s) = p.q.(1, 1, s) = p.q.(1, 1, 1.s) = p.q.s.(1, 1, 1).

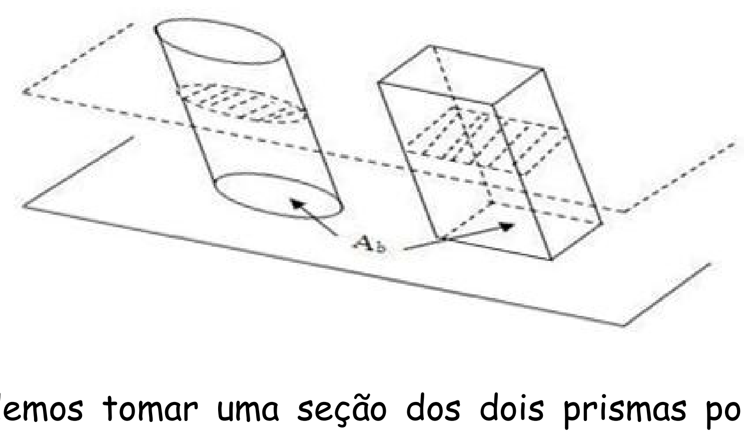
Mas (1, 1, 1) é o volume do cubo unitário, ou seja, é uma unidade de volume. Portanto o volume do bloco retangular é igual a p.q.s, que é o produto das dimensões do bloco.

---------- // ----------

6. Demonstre que o volume de um prisma qualquer é o produto da área da base pela altura.

Resposta:

Já sabemos que o volume de um bloco retangular é o produto de suas três dimensões. Então, dado um prisma qualquer, podemos construir um prisma retangular de base com mesma área da base do prisma que queremos saber o volume.



Podemos tomar uma seção dos dois prismas por um plano paralelo à base e a área da secção dos prismas será igual à área da base. Como a seção é a mesma a altura é a mesma, portanto, pelo princípio de Cavalieri, temos que o volume dos dois prismas é o mesmo.

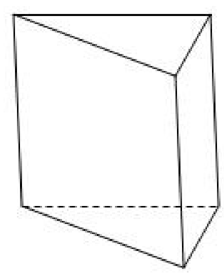
Logo, como o volume do prisma retangular é $V=A_b.H$ e o volume, a área da base e a altura do prisma qualquer são iguais as do prisma retangular podemos concluir que o volume do prisma é também $V=A_b.H$.

---------- // ----------

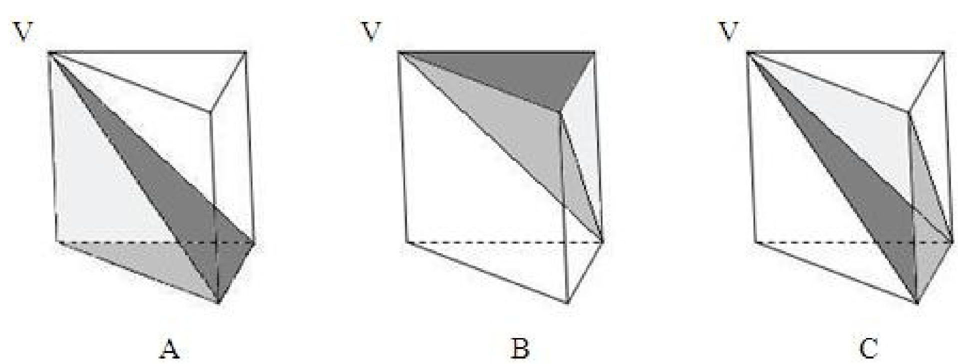
7. Divida o prisma triangular em três pirâmides triangulares de mesmo volume.

<u>Resposta:</u>

Seja um prisma retangular como abaixo:



Queremos dividi-lo em três pirâmides de mesmo volume. Para tanto temos que garantir que duas a duas as pirâmides tenham uma mesma base e uma mesma altura, só assim teremos a certeza de que elas possuem o mesmo volume. Veja as figuras abaixo:



A pirâmide A e a pirâmide B Possuem uma base e uma altura em comum, que são a mesma base e altura do prisma. Portanto possuem o mesmo volume.

A pirâmide B e a pirâmide C possuem em comum uma base, que é são os triângulos formados pela diagonal da face retangular do prisma. A altura em comum é a altura da base relativa ao vértice V. Portanto, a pirâmide B e a pirâmide C possuem o mesmo volume.

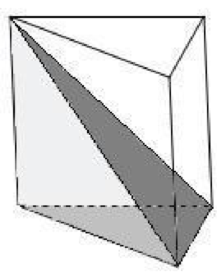
Pela transitividade podemos concluir que as três pirâmides possuem o mesmo volume. Com isso dividimos o prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume.

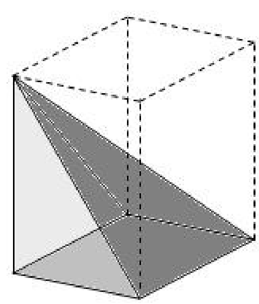
---------- // ----------

8. Demonstre que o volume de qualquer pirâmide é a terça parte do produto da área da base pela altura.

<u>Resposta:</u>

Dada uma pirâmide, podemos construir mais duas pirâmides de mesmo volume que a primeira de forma a constituir um prisma de base triangular ou quadrangular, como vimos no exercício 5 do TG6 e no exercício anterior.





O volume do prisma é dado pela multiplicação da área da base pela altura. Como as três pirâmides possuem o mesmo volume podemos dizer que o volume de cada pirâmide é a terça parte do volume do prisma.

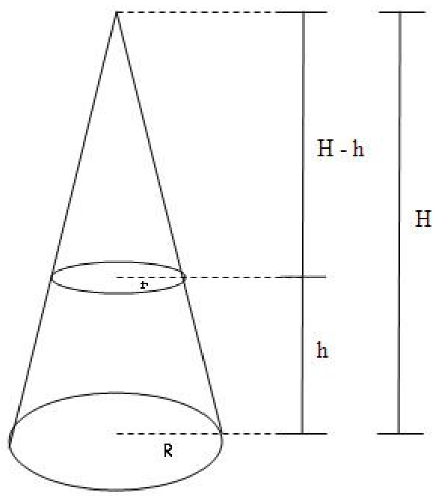
---------- // ----------

11. Mostre que o volume de um tronco de cone de altura h cujas bases são círculos de raios R e r é dado por:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

<u>Resposta:</u>

Seja o cone como o abaixo, com tronco de altura h:



O volume do tronco de cone é o volume do cone maior menos o volume do cone menor:

$$V = \frac{\pi . R^2}{3} . H - \left(\frac{\pi . r^2}{3} . (H - h)\right) \qquad (1)$$

Porém podemos utilizar as relações que existem entre as medidas do cone para obter uma expressão da altura maior em função das outras medidas.

$$\frac{H}{R} = \frac{H - h}{r} \Rightarrow H.r = H.R - h.R \Rightarrow H.R - H.r = h.R \Rightarrow H\left(R - r\right) = h.R$$

$$\Rightarrow H = \frac{h.R}{R - r}$$

Agora substituo em (1):

$$V = \frac{\pi.R^2}{3}.\left(\frac{h.R}{R-r}\right) - \left(\frac{\pi.r^2}{3}.\left(\left(\frac{h.R}{R-r}\right) - h\right)\right)$$

$$V = \frac{\pi.h.R^3}{3}.\frac{1}{R-r} - \left(\frac{\pi.h.r^2.R}{3}.\frac{1}{R-r}.-\frac{\pi.h.r^2}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi.h.R^3}{3}.\frac{1}{R-r} - \frac{\pi.h.r^2.R}{3}.\frac{1}{R-r} + \frac{\pi.h.r^2}{3}$$

$$V = \frac{\pi.h}{3}.\left(\frac{R^3}{R-r} - \frac{r^2.R}{R-r} + \frac{(R-r)r^2}{R-r}\right)$$

$$V = \frac{\pi.h}{3}.\left(\frac{R^3 - r^2.R + r^2.R - r^3}{R-r}\right)$$

$$V = \frac{\pi.h}{3}.\left(\frac{R^3 - r^3}{R-r}\right)$$

$$V = \frac{\pi.h}{3}.\left(\frac{(R^2 + r + R.r).(R-r)}{R-r}\right)$$

$$V = \frac{\pi.h}{3}.(R^2 + r + R.r^2)$$

---------- // ----------

\o/ FIM \o/