Gabarito TG8

Página 41

C.

Considere o paralelepípedo P de arestas a, b e c e volume V.

Considere um x valor um valor qualquer tal que x < abc. Conseguimos aproximar os valores irracionais a, b e c por números racionais r, s e t de tal modo que r < a, s < b, t<c e **x < rst < abc(I).**

Existe um paralelepípedo P’ de arestas racionais r, s e t inscrito no paralelepípedo P. Logo, como P’≠P, **Vol(P’)<Vol(P)(II).** Como r, s e t são racionais **Vol(P’)=rst (III).**

De (I), (II) e (III) temos que, <u>se x é um valor menor que abc então **x< Vol(P).**</u>(*)

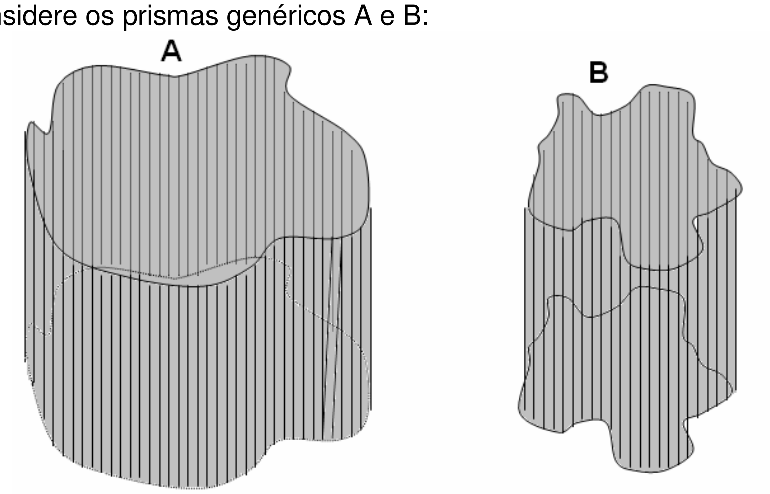
Analogamente, mostramos que <u>se y é um valor maior que abc então **y > Vol(P).**</u> (**)

Então, de (*) e de (**) concluímos que, se para ser o valor de Vol(P) um número não pode ser nem menor nem maior que abc, **Vol(P) = abc**.

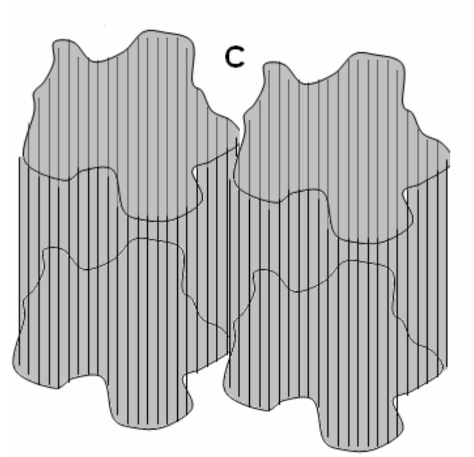
Página 59

B.

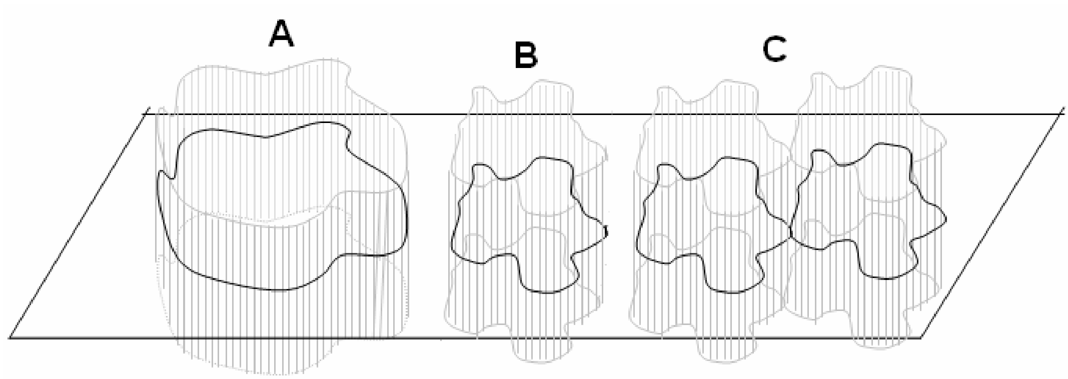
Considere os prismas genéricos A e B:



Considere agora um prisma C, “duas vezes” o sólido B.



Observe os prismas A, B e C.

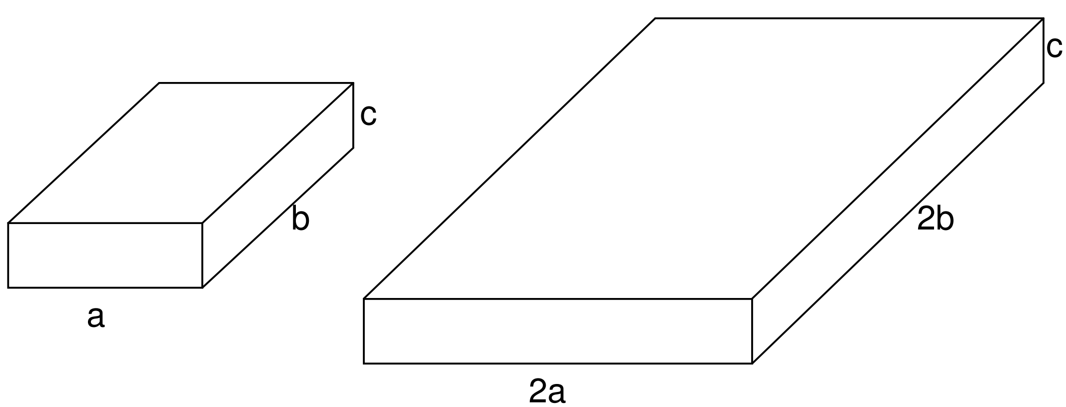


Um plano paralelo às bases dos prismas a uma altura qualquer gera nos prisma A uma secção que tem o dobro da área da secção gerada em B e, por construção, também gera em C uma secção que tem o dobro da área da secção de B logo, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos A e C têm mesmo volume.

Como C tem o dobro do volume de B e A tem o mesmo volume de C, **o prisma A tem o dobro do volume do prisma B.**

C.

Considere a, b e c as dimensões, v o volume e d a densidade do bloco de papel inicial. O segundo pacote terá dimensões 2a, 2b e c. Considere m’ a massa do segundo bloco.



Qualquer plano paralelo à base dos blocos gera, no bloco inicial uma secção de área ab e, no segundo bloco, uma secção de área 4ab, ou seja, quatro vezes a área da secção gerada no bloco inicial.

Analogamente ao exercício anterior, podemos provar que se, para qualquer plano paralelo às bases, a área das secções do segundo bloco é quatro vezes a área das secções do bloco inicial, então, o volume do segundo bloco é quatro vezes o volume do bloco inicial (4v).

Como o segundo bloco é feito do mesmo papel, a densidade deste segundo bloco também é d.

Sabemos que d=m/v, logo, temos a seguinte relação para o bloco inicial:

d.v = 1,5 (I)

e para o segundo bloco temos d=m'/4v (II)

De (I) e (II) temos que **m'= 6kg.**

Página 60

D.

1. Esta divisão está correta, pois, de fato estas duas partes compõem o cilindro original. Desta maneira, o volume do cilindro é: $\frac{5}{4}\left(4^2\pi\right)12 = 240\pi$

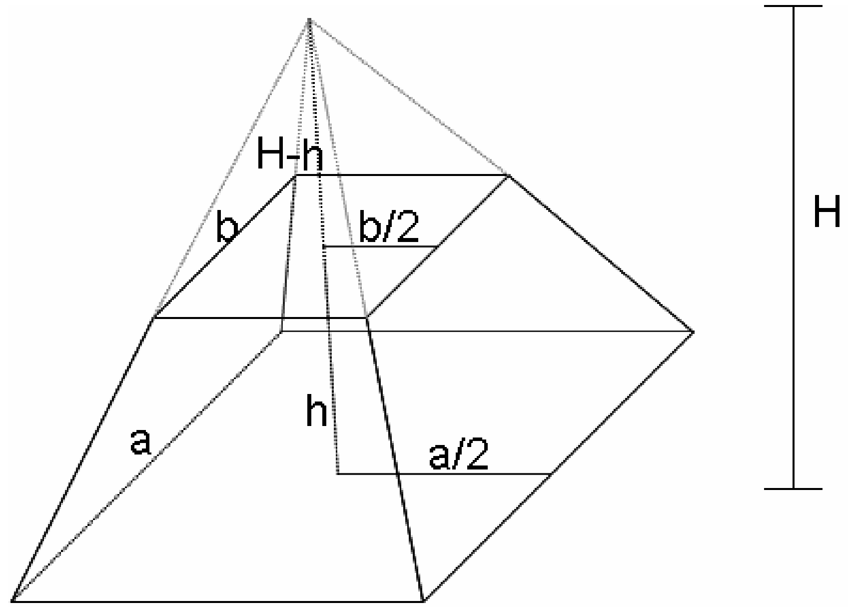
2. Esta divisão está correta, pois, o cone de raio 2 e altura 3 que está na ponta é congruente ao cone que está "faltando" pra completar o cilindro de raio 4 e altura 15. Desta maneira, o volume do cilindro é: $\left(4^2\pi\right)15 = 240\pi$

3. Esta divisão está correta, pois, de fato, o cilindro oblíquo original é metade deste cilindro maior. Desta maneira, o volume do cilindro é: $\frac{1}{2}\left(4^2\pi\right)30 = 240\pi$

Como esperado, os três resultados são iguais.

G.

Observe a figura abaixo:



Por semelhança de triângulos temos:

$$\text{(I)}\quad \frac{H}{H-h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow H = \frac{ha}{a-b}$$

O volume do tronco da pirâmide será igual à diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor.

Volume da pirâmide maior: $\frac{1}{3}a^2H$

Volume da pirâmide menor: $\frac{1}{3}b^2(H-h)$

Volume do tronco $= V_T : \frac{1}{3}a^2H - \frac{1}{3}b^2(H-h)$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos:

$$V_T = \frac{1}{3}a^2\frac{ha}{a-b} - \frac{1}{3}b^2\left(\frac{ha}{a-b} - h\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3h - ab^2h + b^2h(a-b)}{a-b}\right) = \frac{1}{3}h\left(\frac{a^3 - b^3}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

$$\therefore V_T = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

Cada questão vale 2 pontos.