Learning and Teaching Geometry, K-12
NCTM - 1987 Yearbook - Cap. 1

O Modelo van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Mary L. Crowley

Você já teve alunos que podiam reconhecer um quadrado mas não defini-lo? Você já reparou que alguns alunos não entendem que um quadrado é um retângulo? Você já teve alunos que reclamavam ao ter de provar algo que eles já "sabiam"? De acordo com dois educadores holandeses, Diana van Hiele-Geldof e seu marido, Pierre Marie van Hiele, comportamentos como esses refletem o nível de maturidade geométrica de um aluno. Você já desejou saber como ajudar seus alunos a alcançar um nível mais sofisticado de pensamento geométrico? O modelo van Hiele de pensamento geométrico pode ser usado para guiar a instrução bem como avaliar as habilidades dos alunos. Este artigo apresenta uma visão completa do modelo e discute suas implicações na sala de aula.

O modelo van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Diana van Hiele-Geldof (1984a) e Pierre van Hiele (1984b), completados simultaneamente na Universidade de Utrecht. Como Diana faleceu logo após ter terminado sua dissertação, foi Pierre quem esclareceu, apurou e avançou a teoria. Com exceção da União Soviética, onde o currículo de geometria foi revisto na década de 1960 para adaptar-se ao modelo van Hiele, o trabalho demorou a ganhar atenção internacional. Somente a partir da década de 1970 que um norte americano, Isaak Wirszup (1976), começou a escrever e a falar sobre o modelo. Aproximadamente ao mesmo tempo, Hans Freudenthal, orientador dos van Hiele em Utrecht, chamou a atenção ao trabalho deles em seu livro gigantesco, *Mathematics as an Educational Task* (1973). Durante a década passada cresceu o interesse norte-americano nas contribuições dos van Hiele. Isso tem sido particularmente realçado pelas traduções de 1984 para o Inglês de alguns dos principais trabalhos do casal (Geddes, Fuys e Tischler, 1984).

O modelo consiste em cinco níveis de compreensão. Os níveis, classificados em "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor" (Shaughnessy e Burger 1985, p.420) , descrevem características do processo de raciocínio. Auxiliado por experiências instrucionais apropriadas, o modelo afirma que o aprendiz move-se seqüencialmente do nível básico ou inicial (visualização), onde o espaço é simplesmente observado - as propriedades das figuras não são reconhecidas explicitamente, através da seqüência listada acima até o nível mais alto (rigor), que está relacionado com aspectos abstratos formais da dedução. Poucos alunos são expostos ao último nível ou o alcançam. Uma sinopse dos níveis é apresentada a seguir.

O Modelo

Nível 01 (Nível Básico): Visualização

Nesse estágio inicial os alunos estão cientes do espaço somente como algo que existe ao redor deles. Conceitos geométricos são vistos mais como entidades geométricas do que como entidades tendo componentes e atributos. Figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas por suas formas como um todo, isto é, por suas aparências físicas e não por suas partes ou propriedades. Uma pessoa trabalhando neste nível pode aprender vocabulário geométrico, identificar formas especificadas e, dada uma figura, reproduzí-la. Por exemplo, dados os diagramas da figura 1.1, um estudante neste nível seria capaz de reconhecer que há quadrados em (a) e retângulos em (b) porque estes são semelhantes na forma aos quadrados e retângulos encontrados anteriormente. Além disso, dado um geoplano ou papel, o aluno poderia copiar as figuras. Uma pessoa nesse estágio, entretanto, não reconheceria que as figuras têm ângulos retos ou que os lados opostos são paralelos.

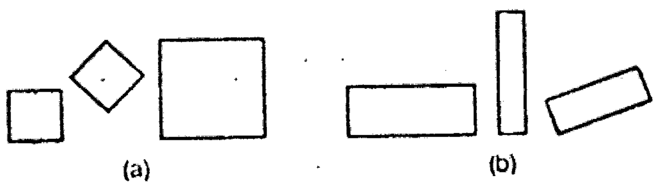


Fig. 1.1

Nível 1: Análise

No nível 1 inicia-se uma análise dos conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e experimentação os estudantes começam a discernir as características da figura. Estas propriedades emergentes são então usadas para conceituar classes de formas. Desse modo figuras são reconhecidas como tendo partes e são reconhecidas pelas suas partes. Dada uma malha de paralelogramos como os da figura 1.2, os alunos poderiam, "colorindo" os ângulos iguais, "estabelecer" que os ângulos opostos de paralelogramos são iguais. Após usar vários desses exemplos, os alunos poderiam fazer generalizações para a classe dos paralelogramos. Relações entre proprieda-

---

1. Diferentes sistemas de numeração para o modelo podem ser encontrados na literatura. Os próprios van Hiele falavam de níveis começando com o nível básico, ou nível 0, terminando com o nível 4.

Relações entre propriedades, entretanto, não podem ainda ser explicadas pelos alunos neste nível, inter-relações entre as figuras ainda não são vistas e definições ainda não são entendidas.

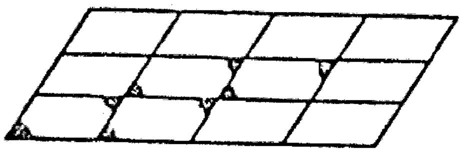


Fig. 1.2

Nível 2: Dedução Informal

Neste nível, os alunos podem estabelecer as inter-relações das propriedades ambos dentro da figura (por exemplo, em um quadrilátero, lados opostos sendo paralelos necessitam que os ângulos opostos sejam iguais) e entre figuras (um quadrado é um retângulo porque ele tem todas as propriedades de um retângulo). Assim eles podem deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classe é entendida. Definições são significativas. Argumentos informais podem ser seguidos e dados. O aluno neste nível, entretanto, não compreende o significado da dedução como um todo ou a função dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são freqüentemente usados em conjunção com técnicas de dedução. Provas formais podem ser deduzidas, mas os alunos não vêem como a lógica poderia ser alterada nem como construir uma prova partindo de premissas diferentes ou não-familiares.

Nível 3: Dedução

Neste nível, a importância da dedução como um modo de estabelecer a teoria geométrica dentro de um sistema axiomático é entendida. A inter-relação e função de termos indefinidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e provas é compreendido. Uma pessoa neste nível pode construir, não somente memorizar provas; a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de um modo é percebida; a interação de condições necessárias e suficientes é entendida; distinções entre uma afirmação e sua recíproca podem ser feitas.

Nível 4: Rigor

Neste estágio o aprendiz pode trabalhar em uma variedade de sistemas axiomáticos, isto é, geometrias não-Euclideanas podem ser estudadas e diferentes sistemas podem ser comparados. A geometria é vista no abstrato.

Este último nível é o último desenvolvido nos trabalhos originais e tem recebido pouca atenção dos pesquisadores. P. M. van Hiele tem reconhecido que está interessado nos primeiros três níveis iniciais em particular (Alan Hoffer, comunicação pessoal, 25 de fevereiro de 1985). Desde que a maioria dos cursos de geometria das escolas de 2º grau são ensinados no nível 3, não é surpreendente que a maioria dos pesquisadores também têm se concentrado em níveis mais baixos. Talvez, como o modelo van Hiele é estendido a outras áreas (está sendo aplicado à economia e química na Holanda), este último nível alcance mais proeminência.

Propriedades do Modelo

Além de fornecer detalhes sobre o raciocínio específico de cada nível de pensamento geométrico, os van Hiele identificaram algumas generalidades que caracterizam o modelo. Essas propriedades são particularmente importantes para professores, pois dão uma direção para tomar decisões instrucionais.

1. Sequencial. Como a maioria das teorias em desenvolvimento, uma pessoa deve prosseguir através dos níveis em ordem. Para trabalhar com sucesso em um nível particular, um aluno deve ter adquirido as "estratégias" dos níveis precedentes.

2. Progresso. O progresso (ou a falta de) de nível para nível depende mais do conteúdo e métodos de ensino recebidos do que da idade: nenhum método de ensino permite a um estudante pular um nível; alguns métodos aceleram, enquanto outros retardam ou até param o movimento entre os níveis. Van Hiele nota que é possível ensinar " a um aluno capaz habilidades além do seu nível real, assim como alguém pode treinar crianças pequenas em aritmética de frações sem dizer a elas o que significam, ou crianças mais velhas em diferenciação e integração embora elas não saibam o que são integrais e quocientes diferenciais " (Freudenthal 1973, p. 25). Exemplos geométricos incluem a memorização de uma fórmula de área ou relações como "um quadrado é um retângulo". Em situações como estas, o que realmente tem acontecido é que o conteúdo da matéria tem sido reduzido a um nível mais baixo, não ocorrendo o entendimento.

3. Intrínseco e extrínseco. Os objetos inerentes a um nível tornam-se os objetos de estudo em um próximo nível. Por exemplo, no nível 0 só a forma de uma figura é percebida. A figura é, obviamente, determinada por suas propriedades, mas é somente no nível 1 que a figura é analisada e seus componentes e propriedades descobertos.

4. Linguística. "Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações conectando estes símbolos" (P. van Hiele 1984a, p. 246). Assim, uma relação que é "correta" em um nível pode ser modificada em outro. Por exemplo, uma figura pode ter mais de um nome (classe de inclusão) - um quadrado é também um retângulo (ou um paralelogramo!). Um estudante no nível 1 não nota que este tipo de confusão pode ocorrer. Esta noção e a linguagem que a acompanha são, entretanto, fundamentais no nível 2.

5. Desconecção. Se o aluno está em um nível e a instrução em outro diferente, o aprendizado e progresso desejados podem não ocorrer. Em particular, se o professor, material de aula, conteúdo, vocabulário e assim por diante estiverem em um nível mais elevado do que o aluno, este não conseguirá acompanhar o raciocínio usado.

Fases do Aprendizado

Como foi indicado acima, os van Hiele afirmam que o progresso através dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou maturidade do aluno. Assim, o método e a organização da aula, bem como o conteúdo e os materiais utilizados são áreas importantes de interesse pedagógico. Para orientar nestes pontos, os van Hiele propuseram cinco fases de aprendizado: inquirição, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Eles afirmam que a aula desenvolvida de acordo com esta seqüência promove a aquisição de um nível (van Hiele-Geldof 1984b). Amostras de atividades do nível 2 com o losango são usadas como ilustração.

Fase 1: Inquirição/Informação

Neste estágio inicial, professor e alunos dedicam sua atenção à conversação e atividades acerca dos objetos de estudo deste nível. São feitas observações, levantadas questões e introduzido o vocábulo específico de cada nível (Hoffer 1983, p. 208). Por exemplo, o professor pergunta aos alunos: "O que é um losango? Um quadrado? Um paralelogramo? Como eles se parecem? Diferentes? Você acha que um quadrado poderia ser um losango? Um paralelogramo poderia ser um quadrado? Por que você diz isto? ..." . A finalidade destas atividades é dupla: (1) o professor fica sabendo qual o conhecimento prévio dos alunos sobre o tópico considerado e (2) os alunos ficam sabendo que direção um estudo mais profundo irá tomar.

Fase 2: Orientação Dirigida

Os alunos exploram o tópico de estudo através de materiais que o professor selecionou cuidadosamente. Estas atividades devem revelar gradualmente aos alunos as estruturas características deste nível. Assim, muito do material será tarefas curtas designadas a elucidar respostas específicas. Por exemplo, o professor poderia pedir aos alunos que usassem um geoplano para construir outro maior ou para construir outro menor. Outra atividade seria construir um losango com quatro ângulos retos, dois ângulos retos, um ângulo reto...

Fase 3: Explicação

Desenvolvendo suas experiências anteriores, os alunos expressam e trocam suas opiniões emergentes sobre as estruturas observadas. À exceção de ajudar os alunos a usar uma linguagem correta e apropriada, a função do professor é mínima. É durante esta fase que o sistema de relações do nível começa a se tornar aparente. Continuando com o exemplo do losango, os alunos discutiriam entre si e com o professor que figuras e propriedades apareceram nas atividades acima.

Fase 4: Orientação Livre

O aluno encontra tarefas mais complexas - tarefas com mais passos, que podem ser concluídas de diversos modos, e tarefas em aberto (sem um fim definido). "Eles ganham experiência em achar seus próprios caminhos ou resolver as tarefas. Orientando-se a si próprios no campo da investigação, muitas relações entre os objetos de estudos tornam-se explícitas aos alunos" (Hoffer 1983, p. 208). Por exemplo, os alunos completariam uma atividade como a seguinte. "Dobre uma folha de papel na metade, então na metade novamente, como mostrado na figura 1.3a. Tente imaginar que tipo de figura você teria se cortasse o canto feito pelas dobras (fig. 1.3b). Justifique sua resposta antes de cortar. Que tipo(s) de figuras você tem se cortar o canto num ângulo de 30°? E num de 45°? Descreva os ângulos nos pontos de intersecção das diagonais. O ponto de intersecção está a que ponto nas diagonais? Por que a área de um losango é descrita por um-meio do produto das duas diagonais?

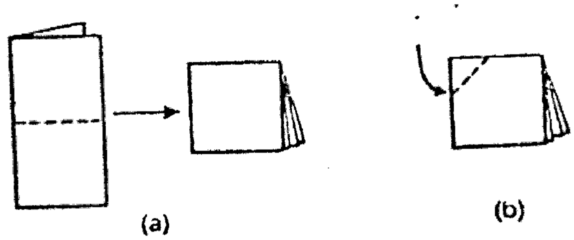


Fig. 1.3

Fase 5: Integração

Os alunos revêem e resumem o que eles aprenderam com o objetivo de formar uma visão total do novo sistema de objetos e relações. O professor pode ajudar nessa síntese "fornecendo uma visão geral" (Van Hiele 1984a, p. 247) do que os alunos aprenderam. É importante, entretanto, que esses resumos não apresentem nada de novo. As propriedades dos losangos que emergiram seriam reunidas e suas origens revistas.

Ao final da quinta fase, os alunos atingem um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases do aprendizado no próximo nível.

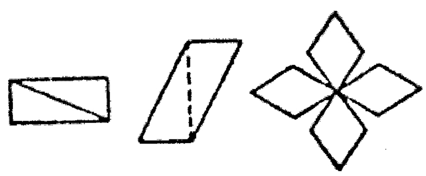
Fornecendo Experiências Básicas no Modelo van Hiele

Implícito no artigo dos van Hiele está a noção de que as crianças deveriam ter conhecimento de uma grande variedade de experiências geométricas. Professores das séries elementares podem fornecer experiências exploratórias de nível básico através de recortes, geoplanos, dobraduras, varetas, barbantes, trabalhos com malhas, mosaicos, tangrans e quebra-cabeças geométricos. Experiências para os níveis colegial e ginasial, grosseiramente nos níveis 1 e 2, podem incluir trabalhos de correspondência, coleções de figuras, e os jogos "cartões de propriedades", "árvores genealógicas" e "qual o meu nome". As páginas seguintes fornecem exemplos desses e de outros tipos de atividades apropriadas aos quatro primeiros níveis dos van Hiele. Muitas dessas idéias foram pegas dos descritores do comportamento dos estudantes, desenvolvidas pelos pesquisadores no Brooklin College (Geddes et al. 1985). Atividades adicionais podem ser encontradas nos artigos de Burger (1985), Burger e Shaughnessy (1986), Hoffer (1981), Prevost (1985), e Shaughnessy e Burger (1985).

Nível Basico (Visualização): **Formas geométricas são reconhecidas com base na sua aparência como um todo.**

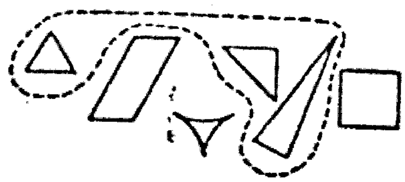
Dar chance aos alunos de:

1. manipular, colorir, dobrar e construir formas geométricas

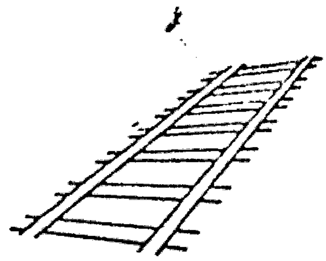


2. identificar uma forma ou relação geométrica -

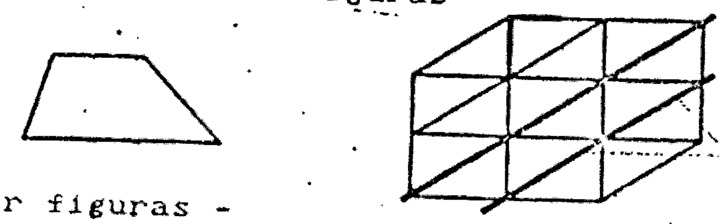
* em um desenho simples
* em um conjunto de recortes, blocos padrão ou outros materiais manipuláveis
* em uma variedade de orientações



* envolvendo objetos físicos da classe, de casa, fotografias e outros lugares

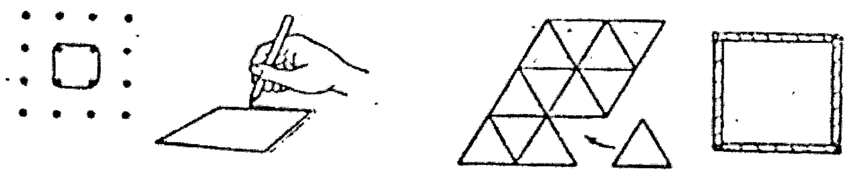


* dentro de outras figuras



3. criar figuras -

* copiando figuras em papel pontilhado, papel quadriculado ou papel transparente, usando geoplanos e geoplanos circulares ou traçando figuras para recortar
* desenhando figuras
* construindo figuras com varetas, canudos, encaixando figuras, blocos padrão, e assim por diante

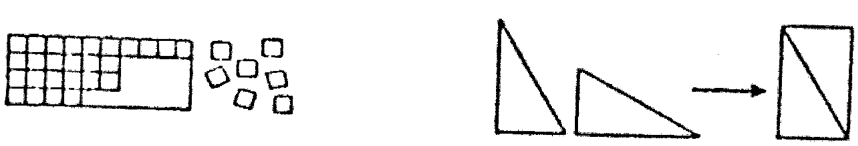


4. descrever figuras geométricas e construções verbalmente, usando a linguagem padrão e não-padrão apropriadas

* um cubo "parece um bloco ou uma caixa"
* "cantos" para ângulos

5. trabalhar com problemas que podem ser resolvidos manuseando figuras, medindo e contando

* Ache a área do topo de uma caixa colocando quadradinhos e contando
* Use duas figuras triangulares para fazer um retângulo; outro triângulo (tangrans)

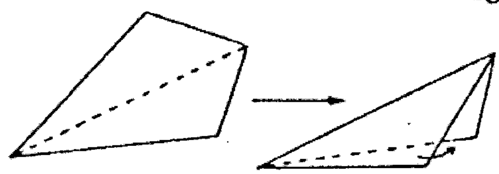


Nível 1 (Análise): A forma cede lugar às propriedades da figura que emergem.

Dar chance aos alunos de:

1. medir, colorir, dobrar, recortar, modelar e encaixar figuras a fim de identificar propriedades das figuras e outras relações geométricas

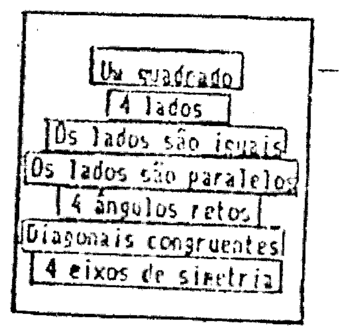
   * dobre uma pipa (papagaio) em uma diagonal e examine a "forma"



2. descrever uma classe de figuras por suas propriedades (esboços, verbalmente, "cartões de propriedades")

   * " Sem usar um desenho, como você descreveria a <figura> para alguém que nunca viu um(a)? "

   * cartões de propriedades

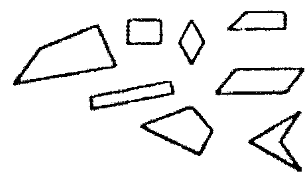


3. comparar formas de acordo com suas propriedades características

   * Note como um quadrado e um losango são parecidos, são diferentes com relação a ângulos, ... em relação aos lados

4. ordenar e reordenar formas por atributos únicos

   * ordene recortes de quadriláteros por
     - número de lados paralelos
     - número de ângulos retos



5. identificar e desenhar uma figura dada uma descrição oral ou escrita de suas propriedades

   * Professores ou alunos decrevem uma figura verbalmente e perguntam por (todas as possíveis) figuras com aquelas propriedades

* "Qual o meu nome?" - revele pistas (propriedades) uma a uma, dando uma pausa entre elas, até que os alunos possam identificar a figura corretamente. Isto pode ser feito sobre um local elevado, folha de papel, cartões de propriedades

"4 lados", "todos os lados iguais" ⇒ 

6. identificar uma forma através de pistas visuais

* revele uma figura gradualmente, pedindo para os alunos identificarem, a cada estágio, os possíveis nomes da figura

7. deduzir empiricamente (estudando muitos exemplos) "regras" e generalizações

* Ladrilhando e medindo muitos retângulos, os alunos vêem que "b x h" é um atalho para a adição do número de quadradinhos

8. identificar propriedades que podem ser usadas para caracterizar ou contrastar classes de figuras diferentes

* Pergunte, "Lados opostos iguais descrevem..."

* Explore a relação entre diagonais e figuras. Juntando dois cartões de propriedades. Um quadrado é gerado pelos pontos extremos dos cartões quando ... (as diagonais são congruentes, cruzam-se dividindo-se em metades iguais e se encontram em ângulos retos). Mudando os ângulos e as diagonais temos ... (um retângulo). Diagonais não congruentes geram ...

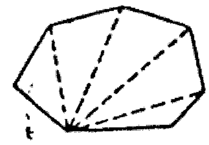
9. descobrir propriedades de classes não familiares de figuras

* a partir de exemplos e não exemplos de trapezios, determine as propriedades dos trapezios.

10. encontrar e usar vocabulário e símbolos apropriados.

11. resolver problemas geométricos que requeiram conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas ou métodos de resolução "criativos"

* Sem medir, ache a soma dos ângulos de um heptágono. (Alguns estudantes verão triângulos, isto é, relacionarão isto a figuras conhecidas).



Nível 2 (Dedução Informal): Um sistema de relações começa a se formar.

Dar chance aos alunos de:

1. estudar as relações desenvolvidas no nível 1, procurando inclusões e implicações

* Use cartões de propriedades:

retângulo		quadrado
4 lados	←	4 lados
lados opostos paralelos	←	lados opostos paralelos
2 diagonais congruentes	←	2 diagonais congruentes
4 ângulos retos	←	4 ângulos retos
lados opostos iguais	←	todos os lados iguais

* Trabalhando em um geoplano, mude um quadrilátero para um trapézio, trapézio para paralelogramo, paralelogramo para retângulo ...
O que foi preciso em cada transformação?

2. identificar um conjunto mínimo de propriedades que descrevam a figura

* os alunos poderiam competir, fiscalizando-se entre si. Pergunte-lhes como eles descreveriam uma figura a alguém. Poderiam usar menos informações? Informações diferentes?

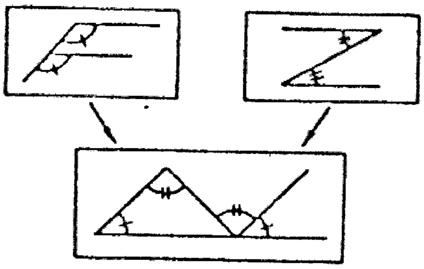
3. desenvolver e usar definições.

* um quadrado é...

4. seguir argumentos informais.

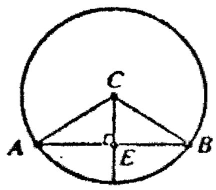
5. apresentar argumentos informais (usando diagramas, figuras recortadas, gráficos)

* "Cartas ancestrais": use cartas com propriedades ou desenhos e flechas para mostrar as "origens" ou a "árvore genealógica" de uma idéia - por exemplo: "O ângulo externo de um triângulo é a soma dos ângulos internos opostos a ele."



6. seguir argumentos dedutivos, fornecendo alguns "passos ocultos"

* C é o centro do círculo.
Explique, porque:
a) AC = BC
b) ∡ CAB ≅ ∡ CBA
c) ΔACE ≅ ΔBCE
d) AE = EB



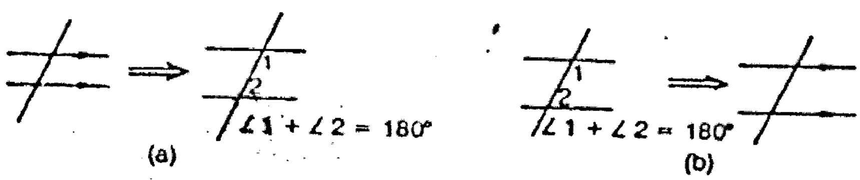
Nota: outras razões, além da resposta de nível 0 "Porque parece ...," devem ser dadas para que o trabalho seja feito no nível 2.

7. tentar fornecer mais de um método de resolução ou explicação

* Defina um paralelogramo de dois modos (isto é, "4 lados, lados opostos paralelos" ou "4 lados, lados opostos congruentes").

8. trabalhar e discutir situações que salientam a reciprocidade de uma afirmação

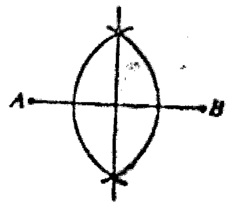
* Escreva a recíproca desta afirmação: se uma transversal intercepta duas retas paralelas, então os ângulos interiores do mesmo lado da transversal são suplementares. Qual diagrama reflete corretamente a recíproca?



* Diga qual a recíproca da seguinte afirmativa e discuta sua validade: "Se está chovendo, eu estou usando botas."

9. resolver problemas onde as propriedades das figuras e suas inter-relações são importantes

* Para construir a mediatriz de um segmento de reta, construa dois arcos de mesmo raio (como mostrado). Explique por que a reta que passa pelos pontos de intersecção dos arcos é a mediatriz perpendicular ao segmento (isto é, use as propriedades de um losango).



Nível 3 (Dedução Formal): A natureza da dedução é entendida.

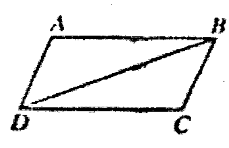
Dar chance aos alunos de:

1. identificar o que é dado e o que deve ser provado em um problema

* Identifique, no seguinte problema, o que é dado e o que deve ser provado. NÃO complete a prova. "A reta perpendicular à base de um triângulo isósceles e que o divide em duas partes iguais, passa pelo vértice do triângulo."

2. identificar a informação contida numa figura ou em informação dada

* A figura ABCD é um paralelogramo. Diga o que você sabe sobre esta figura. Escreva um problema da forma " Se ... então ..." baseado nesta figura.



3. demonstrar e entender o significado de: termo indefinido, postulado, teorema, definição, etc.

* Qual das seguintes afirmativas é um postulado, um teorema, uma definição? Por quê?
  a) Pontos que estão na mesma reta são ditos colineares. (D)
  b) Dois pontos determinam uma reta. (P)
  c) Todo segmento tem exatamente um ponto médio. (T)
  d) O ponto médio de um segmento divide-o em duas partes iguais. (D)

4. demonstrar e entender condições necessárias e suficientes

   * Escreva uma definição de um quadrado que começa com:
     a) Um quadrado é um quadrilátero ...
     b) Um quadrado é um paralelogramo ...
     c) Um quadrado é um retângulo ...
     d) Um quadrado é um losango ...

5. provar rigorosamente as relações desenvolvidas informalmente no nível 2.

6. provar relações não familiares.

7. comparar provas diferentes de um teorema - por exemplo, o Teorema de Pitágoras.

8. usar uma variedade de técnicas de prova - por exemplo: sintética, transformações, coordenadas, vetores, etc..

9. identificar estratégias gerais de prova.

   * Se uma prova envolve paralelismo, tente "cortes", "transversais" ou rotações de 180º.

10. refletir sobre o pensamento geométrico.

    * As seguintes situações envolvem raciocínio dedutivo. Identifique que tipo de raciocínio está envolvido e por quê.
      a) Toda cabra tem barba. Sandy é uma cabra. Logo, Sandy tem uma barba.
      b) Após medir os ângulos de um certo número de quadriláteros, Shelly anuncia: "A soma dos ângulos de um quadrilátero é 360º."

Para serem efetivas, atividades como as anteriores precisam ser colocadas em um contexto. A seção "Fases do Aprendizado" apresenta diretrizes da seqüência e criação de atividades geométricas dentro de um nível. A seção "Propriedades do Modelo" fornece também conselhos aos professores. Em particular, eles propõe que as atividades geométricas não devem reduzir o nível do conteúdo geométrico, e que a linguagem é importante no desenvolvimento e avaliação da compreensão geométrica. Estas idéias são mais discutidas a seguir.

Muito freqüentemente a geometria é ensinada de um modo mecânico. Considere o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º. Geralmente este fato é estabelecido por generalização após medir os ângulos de alguns triângulos, ou pior, a informação é simplesmente dada aos alunos. Este último procedimento é um exemplo de redução 'a informação apenas. Atividades do nível 1, como pintar ângulos de um conjunto de triângulos adjacentes (fig. 1.4), e a extensão desta atividade para a identificação de retas paralelas no conjunto, dá aos alunos um poderoso método, indutivo e dedutivo, para entender o conceito. A idéia de por que a soma é 180º é obtida do trabalho com o conjunto de triângulos adjacentes e, concomitantemente, este trabalho serve como base para a prova formal no nível 3. Uma vantagem adicional deste desenvolvimento particular é que a mesma estrutura pode ser usada novamente para demonstrar que a medida dos ângulos externos de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos.

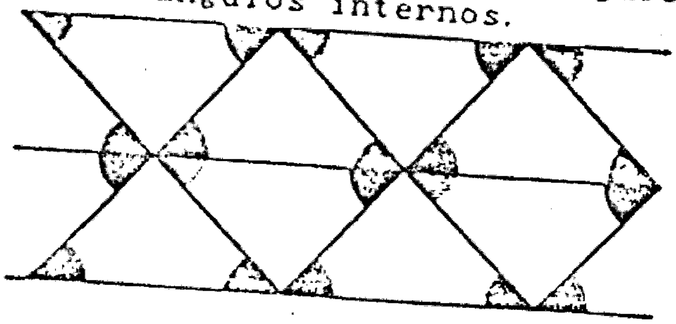


Fig. 1.4

A linguagem, bem como uma escolha cuidadosa de material, tem um importante papel no desenvolvimento do pensamento geométrico. É essencial que as crianças falem sobre suas associações linguísticas para palavras e símbolos e que elas usem esse vocabulário. Tal verbalização requer que os alunos articulem conscientemente o que poderia ser apenas idéias vagas e não desenvolvidas. Pode também servir para revelar idéias imaturas ou mal concebidas. Inicialmente, as crianças devem ser encorajadas a expressar seu conhecimento geométrico com seus próprios termos - "canto" para ângulos, "torto" para os lados de um paralelogramo, "retas" para retas paralelas. Gradualmente, entretanto, deve-se introduzir à criança a terminologia padrão, encorajando-a a usá-la precisamente. Só porque as crianças estão usando uma palavra, não significa que elas atribuam o mesmo significado que os que a ouvem. Por exemplo, algumas crianças dizem que └ é um ângulo reto mas que ┘ é um ângulo esquerdo[2]. Algumas dizem que esta figura (□) é um quadrado, mas quando rotacionada a 45º (◇), não o é mais. Em cada exemplo, crianças enfocaram uma orientação como uma característica determinante (talvez tenha-se mostrado a elas figuras somente na posição usual). Elas estão interpretando os termos ângulo reto e quadrado como tendo um significado restrito. Crianças que operam com noções como estas estão limitando seu desenvolvimento. Através do diálogo, os professores podem descobrir concepções errôneas e noções incompletas bem como estabelecer idéias corretas.

A linguagem empregada pelo professor também é importante. Por exemplo, trabalhando-se no nível 1, termos como todos, alguns, sempre, nunca, algumas vezes, devem ser moldados e encorajados. Frases do nível 2 incluem "segue que..." e "se..., então...". No nível 3 deve-se usar e reforçar o significado de axioma, postulado, teorema, recíproca, necessária e suficiente, e assim por diante.

O questionamento por parte do professor é um fator crucial no direcionamento do raciocínio do aluno. Não é suficiente, por exemplo, perguntar a alunos no nível 2 qual a soma dos ângulos de um pentágono. Eles devem ser desafiados a explicar por que e a pensar sobre suas explicações - poderia ser mostrado de outro modo? "Levantando as questões apropriadas, dando tempo suficiente para respondê-las e discutindo a qualidade das respostas são métodos que levam em conta o nível de pensamento" (Geddes et al. 1985, p. 242).

Para ocorrer o desenvolvimento, é essencial unir a aula ao nível de aluno. Assim, os professores devem aprender a identificar os níveis de pensamento geométrico dos alunos. Como a natureza de uma explicação geométrica de um aluno reflete seu nível de pensamento, o questionamento é um importante meio de avaliação. Como exemplo, considere as respostas às questões "Que tipo de figura é esta? Como você sabe?". Alunos de todos os níveis são capazes de responder "retângulo" à primeira questão (se um aluno não sabe como chamar a figura, ele ou ela não está no nível 0 para retângulos). Exemplos de respostas para cada nível específico são dadas abaixo. Em seguida está uma breve explicação do por que a afirmação reflete o nível designado.

Nível 0: "Parece com um !" ou "Parece com uma porta". (A resposta é baseada em um modelo visual).

Nível 1: "Quatro lados, fechado, dois lados compridos, dois lados mais curtos, lados opostos paralelos, quatro ângulos retos ... " (Propriedades são listadas, redundâncias não são observadas).

Nível 2: "É um paralelogramo com ângulos retos". (O aluno tenta dar um mínimo de propriedades. Se perguntado, ele indicaria que sabe que neste exemplo seria redundante dizer que os lados opostos são congruentes).

Nível 3: "Isto pode ser provado se eu souber que esta figura é um paralelogramo e que um ângulo é reto". (O aluno procura provar o fato dedutivamente).

Exemplos adicionais de comportamentos de alunos em cada nível podem ser encontrados em *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolecents* (Geddes et al. 1985, pp. 62-78) e em *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry* (Burger e Shaugnessy 1986, pp. 41-45).

O modelo de pensamento geométrico e as fases do aprendizado desenvolvidas pelos van Hiele propõe um meio de identificar o nível de maturidade geométrica de um aluno e sugere métodos para ajudar os alunos a progredirem através dos níveis. A aula, mais que a maturidade, é apontada como o fator mais importante para este desenvolvimento. Pesquisas têm reforçado a precisão do modelo na avaliação do aluno em geometria (Burger 1985; Burger e Shaugnessy 1986; Geddes et al. 1982; Geddes, Fuys e Tischler 1985; Mayberry 1981; Shaugnessy e Burger 1985). A necessidade agora é que professores e pesquisadores refinem as fases de aprendizagem, desenvolvam o material dso van Hiele e implementem esses materiais e filosofias em sala de aula. O pensamento geométrico pode ser acessível a qualquer um.

Traduzido por Alexandre da S. Mello

Referências Bibliográficas

Burger, William F. "Geometry." *Arithmetic Teacher* 32 (February 1985): 52–56.

Burger, William F., and J. Michael Shaughnessy. "Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry." *Journal for Research in Mathematics Education* 17 (January 1986): 31–48.

Freudenthal, Hans. *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, 1973.

Geddes, Dorothy, David Fuys, C. James Lovett, and Rosamond Tischler. "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York, March 1982.

Geddes, Dorothy, David Fuys, and Rosamond Tischler. "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents." Final report, Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640. Washington, D.C.: NSF, 1985.

Hoffer, Alan. "Geometry Is More Than Proof." *Mathematics Teacher* 74 (January 1981): 11–18.

———. "Van Hiele-based Research." In *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes,* edited by R. Lesh and M. Landau. New York: Academic Press, 1983.

Mayberry, Joanne W. "An Investigation in the Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers" (Doctoral dissertation, University of Georgia, 1979). *Dissertation Abstracts International* 42 (1981): 2008A. (University Microfilms No. 80-23078)

Prevost, Fernand J. "Geometry in the Junior High School." *Mathematics Teacher* 78 (September 1985): 411–18.

Shaughnessy, J. Michael, and William F. Burger. "Spadework Prior to Deduction in Geometry." *Mathematics Teacher* 78 (September 1985): 419–28.

Usiskin, Zalman. "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry." Final report, Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project. Chicago: University of Chicago, 1982.

van Hiele, Pierre M. "A Child's Thought and Geometry." In *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* edited by Dorothy Geddes, David Fuys, and Rosamond Tischler as part of the research project "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents," Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640. Washington, D.C.: NSF, 1984a. (Original work published in 1959.)

———. "English Summary by Pierre Marie van Hiele of the Problem of Insight in Connection with School Children's Insight into the Subject Matter of Geometry" In *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* edited by Dorothy Geddes, David Fuys, and Rosamond Tischler as part of the research project "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents," Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640. Washington, D.C.: NSF, 1984b. (Original work published in 1957.)

van Hiele-Geldof, Dina. "Dissertation of Dina van Hiele-Geldof Entitled: The Didactic of Geometry in the Lowest Class of Secondary School." In *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* edited by Dorothy Geddes, David Fuys, and Rosamond Tischler as part of the research project "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents," Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640. Washington, D.C.: NSF, 1984a. (Original work published in 1957.)

———. "Last Article Written by Dina van Hiele-Geldof entitled: Didactics of Geometry as Learning Process for Adults." In *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele,* edited by Dorothy Geddes, David Fuys, and Rosamond Tischler as part of the research project "An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents," Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation, Grant No. SED 7920640. Washington, D.C.: NSF, 1984b.