

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

Disciplina:

MAT1513 - Laboratório de Matemática

Prof. Antonio Carlos Brolezzi

www.ime.usp.br/~brolezzi brolezzi@usp.br

Aula 1

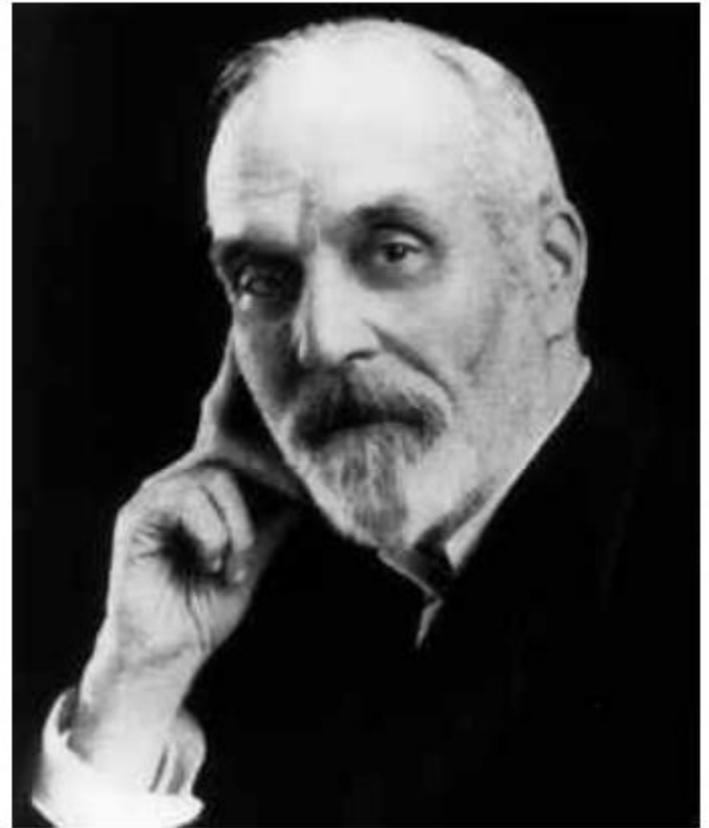
Objetivos

- Discutir tópicos relevantes do Ensino Básico, tendo em vista propiciar um embasamento conceitual adequado.
- Favorecer a compreensão da natureza do pensamento, da linguagem e do fazer matemáticos.
- Apresentar situações-problema que desafiem e impulsionem a autonomia e pensamento dos alunos.

Programa

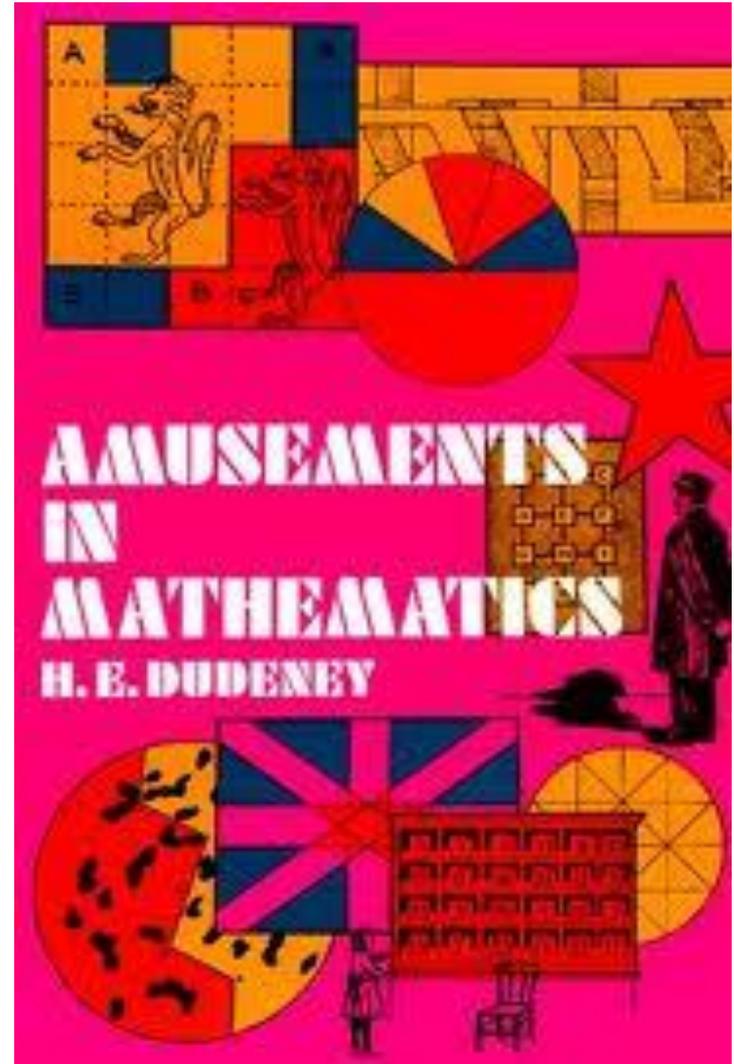
- Noções de Lógica
- Noções de Álgebra
- Funções e gráficos
- Funções exponenciais e logarítmicas.
- Números complexos
- Indução Matemática
- Resolução de problemas

Henry Ernest Dudeney
(1857-1930), matemático e
escritor inglês e que se
especializou em diversões
matemáticas.



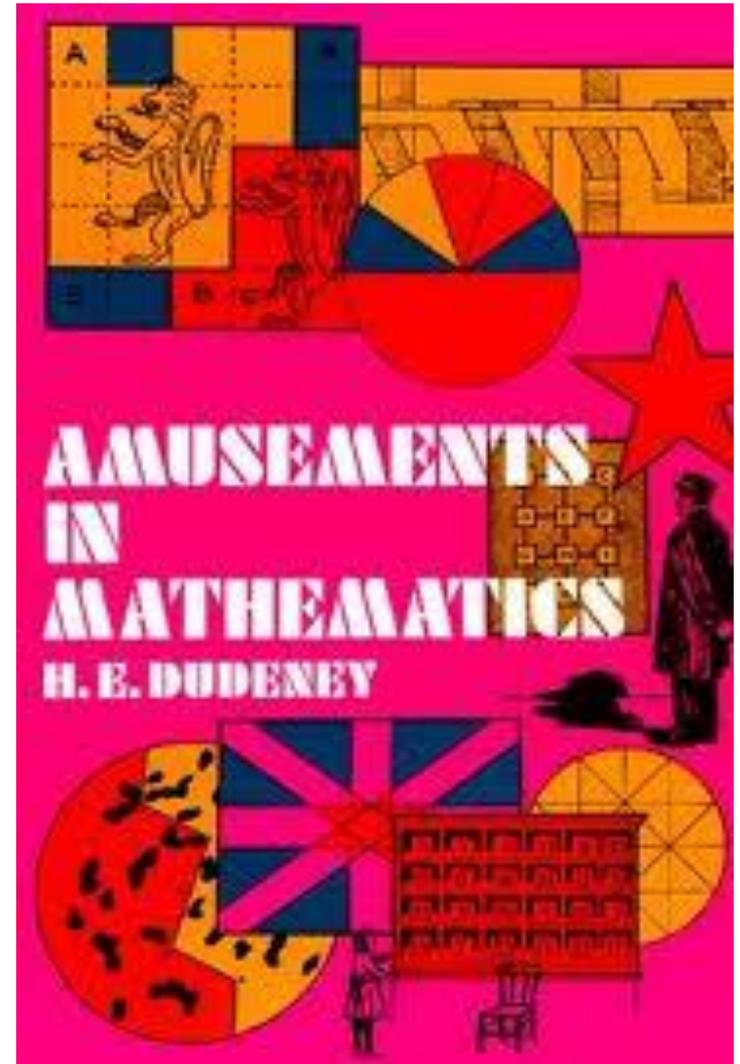
Atividades de diversão matemática agrupadas em diversas categorias.

Com soluções e comentários muito interessantes.

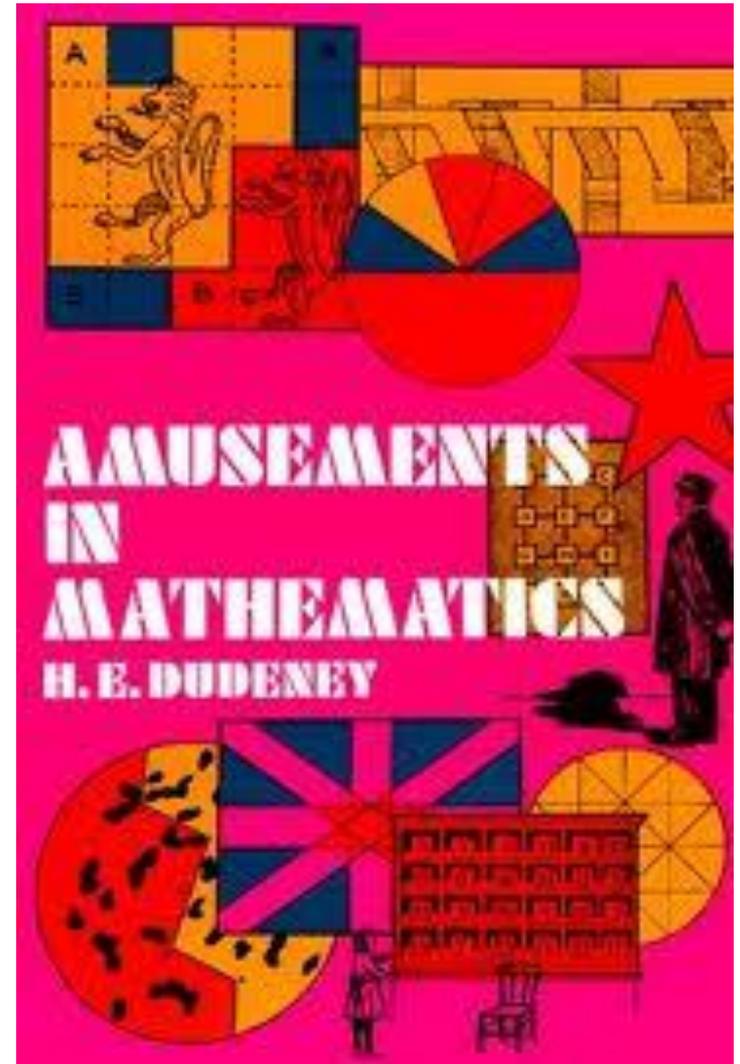


Você pode fazer o *download* da obra de domínio público de Dudeney *Amusements in Mathematics* disponível no Projeto Gutenberg:

<http://www.gutenberg.org/ebooks/16713>



Uma atividade criada por Dudeney e publicada em 24 de maio de 1903 no jornal britânico *The Weekly Dispatch*.



A figura abaixo mostra seis homens e seis mulheres. Números ímpares são mulheres, números pares são homens. Essas doze pessoas formam seis casais que se misturaram em um passeio. Estamos interessados particularmente no homem de número 10 ao fundo. Quem será a mulher dele?



Esta ilustração está reduzida em relação ao que apareceu originalmente, mas espera-se que tenha detalhes suficientes para permitir ao leitor divertir-se ao examiná-la.



Diz Dudeney: Mostrei a figura a alguns amigos, e eles expressaram diversas opiniões a respeito. Um dele disse, “Eu não casaria com uma garota como a Número 7.” Outro disse, “Tenho certeza que uma garota simpática como a Número 3 não iria se casar com um cara desse tipo!” Outro disse: “Deve ser a Número 1, pois ela foi o mais distante possível do bruto!” Foi sugerido, também, que era mulher Número 11, porque “ele parece estar olhando para ela;” mas um cínico respondeu, “Por esta mesma razão, se ele está mesmo olhando para ela, eu diria que ela não é a mulher dele!” Agora deixo a questão nas mãos dos meus leitores. Quem é realmente a mulher do número 10?





Não há adivinhação neste enigma. É apenas uma questão de eliminação. Se podemos encontrar os outros pares, então a senhora restante é a esposa do 10. Vou mostrar como isso pode ser feito. 8 está carregando um guarda-sol de mulher, na mesma mão em que segura sua bengala. Mas todas as senhoras estão com guarda-sois, exceto a 3. Portanto, a 3 é seguramente a mulher do 8. Agora o 12 está segurando uma bicicleta, e se trata de uma bicicleta feminina. A única senhora com roupa de ciclismo é a 5; portanto, a 5 é a esposa do 12.

Em seguida, o homem 6 tem um cachorro, e a mulher 11 parece estar segurando uma corrente de cachorro. Então podemos casar 6 com 11. Agora vemos que o 2 está pagando o jornal ao menino. Mas não pagamos o jornal antes de recebê-lo, e o homem não está recebendo jornal. Mas a senhora 9 está lendo um jornal. Logo, a inferência é óbvia – que ela mandou o menino cobrar do marido. Portanto casamos o 2 com o 9. Assim, já definimos todas as mulheres exceto 1 e 7, e todos os homens exceto 4 e 10. Olhando para 4, vemos que ele está carregando um casaco sobre seu braço, e os botões estão do lado esquerdo, não do lado direito, como um casaco masculino. O casaco com certeza não pertence a 1, pois ela parece já estar usando um casaco, enquanto 7 está vestida muito levemente. Portanto casamos 7 com o homem 4. Agora resta apenas a 1, que deve ser necessariamente a mulher de 10. Esta é a resposta correta.

Lógica e demonstrações

Leia o texto abaixo com atenção:

— Excelente! — disse Gandalf, enquanto saía de trás de uma árvore e ajudava Bilbo a descer de um espinheiro. Então Bilbo entendeu. Fora a voz do mago que mantivera os trolls discutindo e brigando, até que a luz chegou e acabou com eles.

O próximo passo foi desamarrar os sacos e libertar os anões.

Estavam quase sufocados, e muito furiosos: não tinham gostado nada de ficar ali jogados, ouvindo os trolls fazendo planos de assá-los e esmagá-los e fazer picadinho deles. Tiveram de ouvir o relato de Bilbo sobre o que lhe acontecera duas vezes antes de ficarem satisfeitos.

O Hobbit. J.R.R. Tolkien

Baseando-se exclusivamente no trecho acima, assinale as afirmações que se seguem com V (verdadeira), F (falsa) ou I (incerta).

- () 1. A voz do mago manteve os trolls brigando.
- () 2. Bilbo sabia o tempo todo o que estava acontecendo.
- () 3. Os trolls planejavam o que iam fazer com os anões.
- () 4. Os anões não conseguiam ouvir enquanto estavam dentro dos sacos.
- () 5. Os anões não acreditaram logo em Bilbo.
- () 6. O nome do mago era Gandalf.
- () 7. Bilbo tinha trepado num arbusto espinhoso.
- () 8. Gandalf estava escondido atrás de uma árvore.
- () 9. Eram sete anões.
- () 10. Trolls são horríveis criaturas noturnas.

Fazer ligação entre elementos distintos é função da lógica.

A Lógica se restringe a uma análise muito específica da linguagem, enfocando apenas seu aspecto de *coerência*, ou seja, a concordância de uma afirmação com outras que a precedem. Dado um fato, o que é permitido concluir dele?

Se o texto diz que Galdalf ajudou Bilbo a descer do arbusto espinhoso, então a Lógica permite concluir que Bilbo antes estava lá em cima. Mas nada se pode afirmar com segurança sobre o *modo* como Bilbo chegou lá: se subiu por si mesmo ou se, por exemplo, foi chutado para cima por um troll.

No curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP há uma disciplina optativa eletiva indicada para o 7º período ideal chamada

MAT0349 - Introdução à Lógica.

Aqui faremos apenas uma breve introdução sobre as proposições condicionais, a fim de entender melhor o que é uma demonstração matemática.

A Lógica necessária para a maioria das demonstrações matemáticas pode ser simplificada para o estudo dessas *sentenças* ou *proposições condicionais*, isto é, aquelas que podem ser expressas da forma:

Se a, então b.

onde **a** e **b** são frases que possuem a propriedade de ser verdadeiras ou falsas.

Numa proposição condicional, há uma *condição*, ou seja, um fato prévio, e uma *conclusão*, que decorre da condição.

Também podemos chamar a condição de *hipótese*, e a conclusão de *tese*.

Assim, o texto nos permite chegar à seguinte conclusão com respeito a Galdalf e a árvore:

Se Galdalf saiu de trás de uma árvore,
então antes ele estava atrás dela.

Mas nada podemos afirmar sobre o que Gandalf estava fazendo atrás da árvore, se estava escondido, ou simplesmente se passou por trás dela.

A Lógica nos diz, portanto, o que é seguro afirmar. O resto são suposições que o breve trecho considerado não nos permite verificar, como por exemplo o número de anões, a natureza dos trolls, etc.

Para nós, agora, o que interessa é que saibamos reduzir nossas idéias a sentenças condicionais do tipo "se-então".

Por exemplo, a afirmação:

Todo hobbit tem pé peludo.

pode ser escrita como:

Se você é um hobbit, então você tem pé peludo.

É claro que uso sujeito "você" pode fazer perder a generalidade universal da sentença original.

Mas isso não nos deve perturbar, uma vez que apenas queremos expressar a *implicação* da idéia de **ser um hobbit** na idéia de **ter pé peludo**. Portanto, tanto faz, para nós, aqui, dizer:

"Se eu sou um hobbit, então eu tenho pé peludo",

ou dizer:

"Se Alfredo é um Hobbit, então Alfredo tem pé peludo".

Basta que a estrutura seja do tipo:

"Se é um hobbit, então tem pé peludo".

1. (forms) Escreva na forma "se-então" expressando o sentido da frase:

a. Todo homem é mortal.

b. Quem estuda, passa de ano.

c. Quem não tem cão, caça com gato.

d. Os elefantes não esquecem.

e. Nenhum professor mora em Marte.

Diagramas de Euler

Tratam-se de uns esquemas que Euler desenvolveu com o objetivo de explicar Lógica a uma Princesa da Alemanha com a qual se correspondia, uma vez que estes diagramas aparecem pela primeira vez em suas cartas.

Um diagrama de Euler consiste em geral de duas regiões, uma dentro da outra, de modo que a menor representa o universo compreendido pela hipótese da proposição condicional e a maior pela sua conclusão.

Por exemplo, a proposição

Se você mora no Instituto Butantã, então você mora em São Paulo.

pode ser expressa pelo seguinte diagrama.

Se você mora no Instituto Butantã, então você mora em São Paulo.

pode ser expressa pelo seguinte diagrama:



2. Escreva uma proposição condicional que possa ser representada por este diagrama de Euler:



3. (forms) Desenhe diagramas de Euler para representar a proposição:

A. Se você está com sede, então pede uma Coca-Cola.

e um segundo diagrama de Euler para representar a proposição:

B. Se você pede uma Coca-Cola, então está com sede.

4. Qual dos diagramas de Euler, A ou B, também ilustra a sentença abaixo?

Se você não está com sede, então não pede uma Coca-Cola.

A.



B.



Um autor que procurou popularizar a Lógica foi um professor de Lógica de Oxford, chamado Charles Lutwidge Dodgson, viria a tornar-se famoso através de seu pseudônimo Lewis Carroll.

Foi um criador de exemplos e exercícios que se tornaram clássicos, e que aparecem não só em suas obras de Lógica, como *Symbolic Logic* ou *The Game of Logic*, mas também nas aventuras de Alice.



CKs

`Then **you should say what you mean,**' the March Hare went on

`I do,' Alice hastily replied; `at least -- at least **I mean what I say** -- that's the same thing, you know.'

`Not the same thing a bit!' said the Hatter. `Why, you might just as well say that "**I see what I eat**" is the same thing as "**I eat what I see**!"

`You might just as well say,' added the March Hare, `that "**I like what I get**" is the same thing as "**I get what I like**!"

`You might just as well say,' added the Dormouse, which seemed to be talking in its sleep, `that "**I breathe when I sleep**" is the same thing as "**I sleep when I breathe**!"

`**It is the same thing with you,**' said the Hatter, and here the conversation dropped, and the party sat silent for a minute (...)

Uma tradução possível:

"Então você pode dizer o que acha", a Lebre de Março continuou.

"E vou", Alice replicou rapidamente, "pelo menos – pelo menos, **eu acho o que digo** – o que é a mesma coisa, você sabe."

"Não é a mesma coisa nem um pouco!", disse o Chapeleiro.

"Senão você também poderia dizer", completou a Lebre de Março, "que **'Eu gosto daquilo que tenho'** é a mesma coisa que **'Eu tenho aquilo que gosto.'**"



"Seria o mesmo que dizer",
interrompeu o Leirão, que parecia
estar falando enquanto dormia,
"que **'Eu respiro enquanto durmo'**
é a mesma coisa que **'Eu durmo
enquanto respiro!'**"
"Isso é a mesma coisa para
você", disse o Chapeleiro, e nesse
ponto a conversa parou e a reunião
ficou em silêncio por um minuto.



<<http://www.alfredo-braga.pro.br/biblioteca/alice.html>>

Tradução: Clélia Ramos

O texto acima mostra que *nem sempre a recíproca é verdadeira.*

Abaixo segue-se uma tabela com as diferentes relações lógicas entre proposições:

<i>Proposição inicial:</i>	Se a, então b.
<i>Contrapositiva:</i>	Se não b, então não a.
<i>Recíproca:</i>	Se b, então a.
<i>Inversa:</i>	Se não a, então não b.

Nos exercícios 1, 2 e 3, Identifique as proposições dadas como contrapositivas, recíprocas ou inversas da sentença original, dizendo também quais delas são logicamente equivalentes à sentença original.

1. *Se sou carioca, então sou brasileiro.*
 - a. Se não sou brasileiro, então não sou carioca.
 - b. Se sou brasileiro, então sou carioca.
 - c. Se não sou carioca, então não sou brasileiro.

Nos exercícios 1, 2 e 3, Identifique as proposições dadas como contrapositivas, recíprocas ou inversas da sentença original, dizendo também quais delas são logicamente equivalentes à sentença original.

2. *Se tenho pressa, então não vou de ônibus.*

a. Se não tenho pressa, então vou de ônibus.

b. Se vou de ônibus, então não tenho pressa.

c. Se não vou de ônibus, então tenho pressa.

3. *Todo mineiro gosta de queijo.*

a. Quem gosta de queijo é mineiro.

b. Se Chico não é mineiro então ele não gosta de queijo.

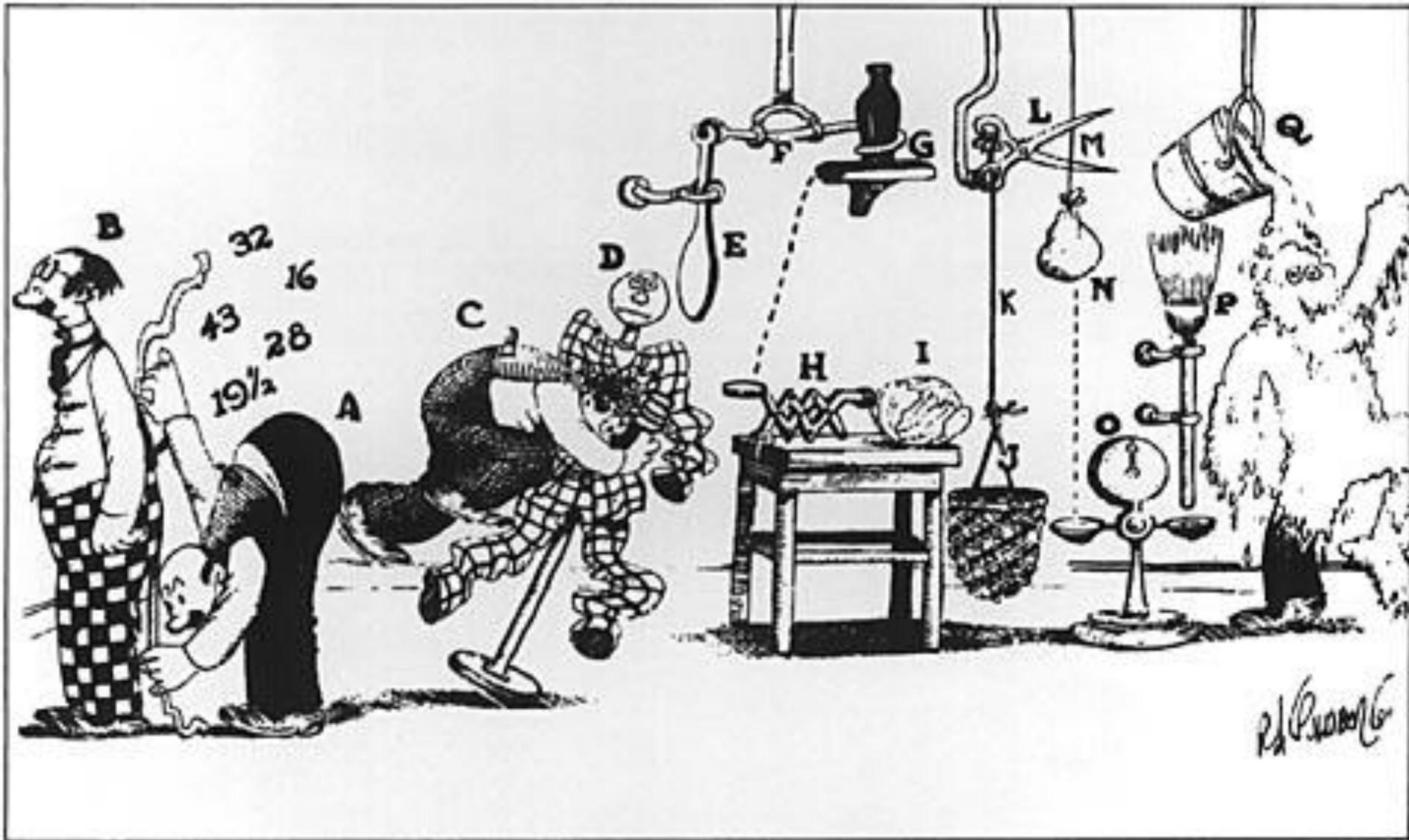
c. Se você não gosta de queijo, então você não é de Minas.

4. (forms) Escreva a recíproca, a inversa e a contrapositiva da proposição dada, identificando aquela que concorda com a original:

*Se você é um piloto de caça,
então você não tem problema na vista.*

- a. Recíproca
- b. Inversa
- c. Contrapositiva

Teoremas e Demonstrações



Idea For Dodging Bill Collectors RUBE GOLDBERG (tm) RGI 048

Demonstrações diretas

"Se o costureiro (A) tira as medidas do seu freguês (B) e dita em voz alta as medidas, então o assistente (C) acha que são códigos de futebol e pula sobre o manequim (D). Se o manequim bate a cabeça contra o saco de boxe (E), o saco puxa o anzol (F) e atira a garrafa (G) sobre o dobrador de chapéu (H) que se estende e empurra o repolho (I) dentro da cesta (J). Se o peso do repolho puxa o fio (K), então ele fecha a tesoura (L) para cortar o fio (M). Se o saco de areia (N) cai sobre a balança (O) e empurra a vassoura (P) contra o balde de água com cal (Q), então a cal cai sobre você fazendo com que você pareça uma estátua de mármore e tornando impossível que você seja reconhecido pelas pessoas para quem você deve dinheiro. "

Nesta fantástica invenção do artista americano Rube Goldberg, você pode ficar livre dos cobradores contanto que o costureiro tire as medidas do freguês e as dite em voz alta, através de um mecanismo que é um modelo de *demonstração direta*, muito usada na Matemática.

Numa demonstração direta, há um encadeamento de proposições, que prova uma proposição chamada *teorema*.

No caso, o *teorema* que foi demonstrado é:

"Se o costureiro tira as medidas do cliente e as diz em voz alta, torna-se impossível que você seja reconhecido pelas pessoas para quem você deve dinheiro."

Qual o *teorema* que se quer *demonstrar* na cadeia de proposições seguinte?

Se chove muito, as ruas se alagam.

Se as ruas se alagam, o trânsito fica parado.

Se o trânsito fica parado, ligo o rádio e ouço as notícias.

Se ligo o rádio e ouço as notícias, fico por dentro.

Reponha a proposição que está faltando nas argumentações abaixo:

Teorema:

Se parar a força durante a noite, acordarei mais cedo que de costume.

Demonstração:

Se parar a força durante a noite, acabará a bateria do meu celular.

Se acaba a bateria do meu celular, fico chateado e vou dormir.

Se ...

b) *Teorema:*

Se há um eclipse total do sol, a temperatura pode ser determinada sem termômetro.

Demonstração:

Se há um eclipse total do sol, o céu torna-se escuro.

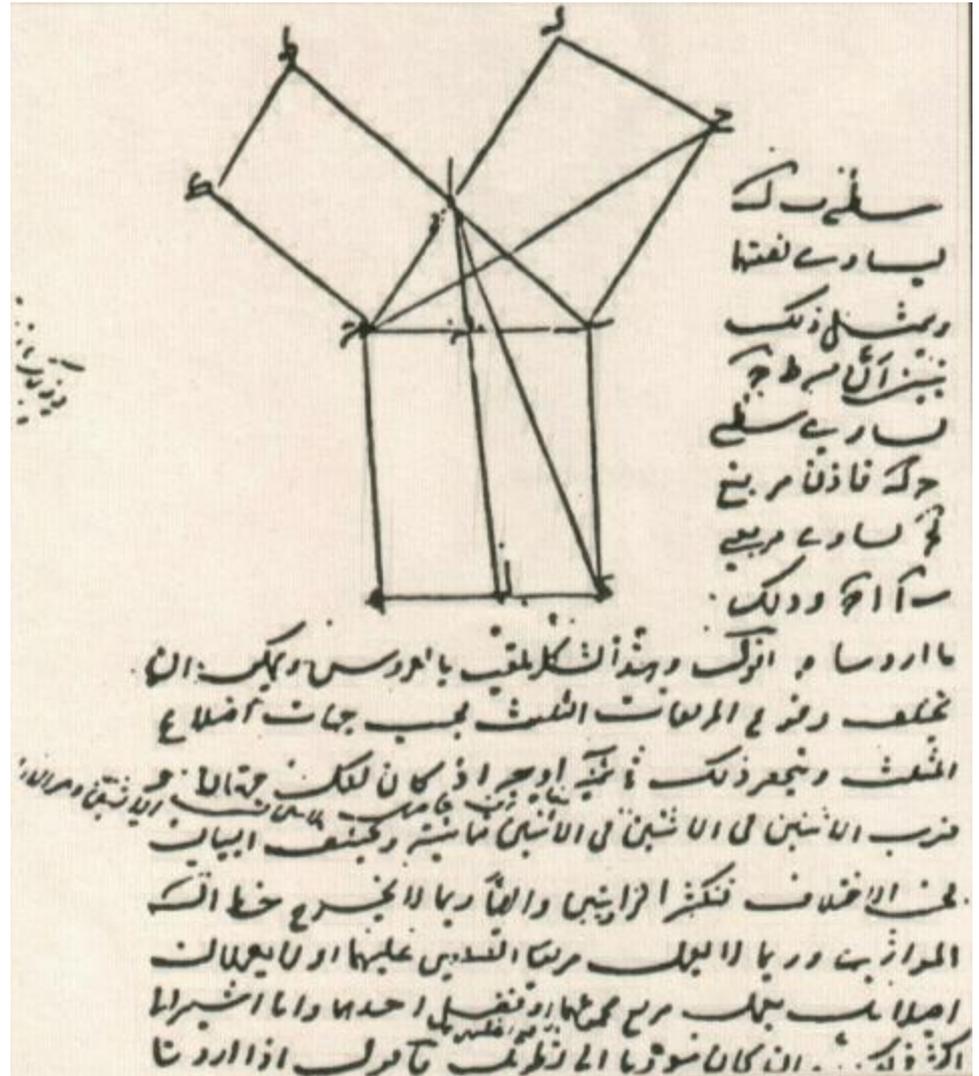
Se ...

Se os grilos pensam que já anoiteceu, começam a trinar.

Se ...

Se a temperatura pode ser estimada pela frequência do trinado dos grilos, ela pode ser determinada sem termômetro.

Os gregos inauguraram o método da prova imaterial, a demonstração matemática



Teorema de Pitágoras em *Os Elementos* de Euclides
(manuscrito árabe)

Afirma-se que no século VI antes de Cristo, teria havido uma escola de filosofia com caráter de seita religiosa, fundada pelo filósofo Pitágoras de Samos (570-496 a.C.).





Os pitagóricos celebram o nascer do Sol, de Fyodor Bronnikov

Foi um período de grandes criações religiosas e matemáticas.

Lao Tse (604-531 a.C.)

Confúcio (551-479 a.C.)

Sidarta Gautama (563-483 a.C.)

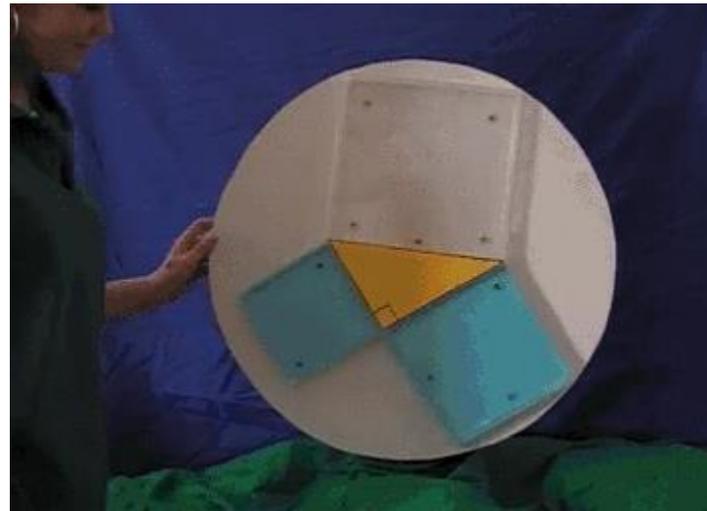
Pitágoras de Samos (570-496 a.C.)

Se existiu uma “matemática pitagórica”, tratava-se de uma prática bastante concreta (...) e não deve estar relacionada ao pensamento abstrato que costumamos associar à matemática grega (ROQUE, 2012)

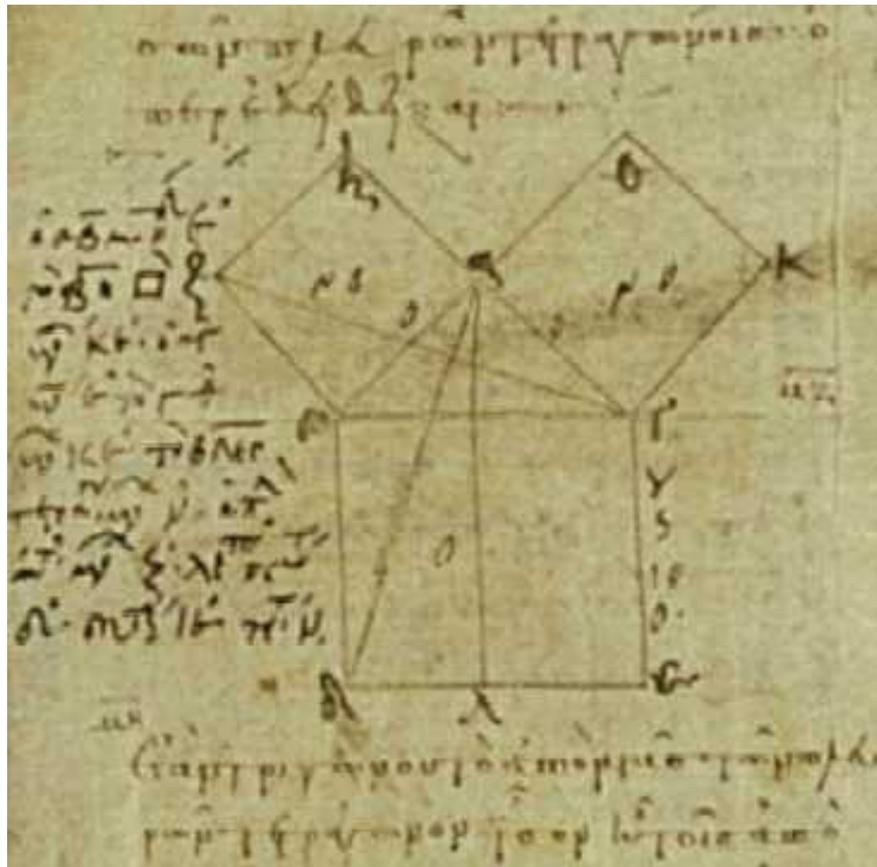
A escola pitagórica representa o período em que a matemática não se apresentava como conhecimento sistematizado, mas ainda em fase de elaboração, investigação, pesquisa e construção.



O método de Arquimedes de fazer experiências no laboratório e depois provar, remonta à tradição inaugurada pelos pitagóricos há 2500 anos.



Avanços na ideia da demonstração matemática podem ser atribuídos a ele e seus seguidores, o que justificaria a associação do nome de Pitágoras à prova de um dos teoremas mais conhecidos da geometria.



O teorema de Pitágoras é demonstrado na proposição 47 do Livro I de Os Elementos de Euclides (300 a.C.)