Teoremas de Incompletude de Gödel e os Fundamentos da Matemática

Rogério Augusto dos Santos Fajardo

MAT554 - Panorama de Matemática

6 e 8 de agosto de 2018

Lógica e Teoria dos Conjuntos servem como:

Lógica e Teoria dos Conjuntos servem como:

- **Fundamentos da Matemática:** formaliza a matemática, evitando paradoxos e tornando preciso o conceito de demonstração.

Lógica e Teoria dos Conjuntos servem como:

- **Fundamentos da Matemática:** formaliza a matemática, evitando paradoxos e tornando preciso o conceito de demonstração.
- **Objetos de estudo da Matemática:** as questões que surgem em lógica e teoria dos conjuntos são interessantes por si próprias, tornando essas disciplinas áreas de pesquisa emergentes da matemática, que estão crescendo no restante do mundo.

Lógica e Teoria dos Conjuntos servem como:

- **Fundamentos da Matemática:** formaliza a matemática, evitando paradoxos e tornando preciso o conceito de demonstração.
- **Objetos de estudo da Matemática:** as questões que surgem em lógica e teoria dos conjuntos são interessantes por si próprias, tornando essas disciplinas áreas de pesquisa emergentes da matemática, que estão crescendo no restante do mundo.
- **Ferramenta para outras áreas:** vários problemas em outras áreas da matemática só foram resolvidos graças às técnicas de lógica e teoria dos conjuntos, mesmo quando os enunciados nada dizem a respeito dessas áreas.

Breve história dos fundamentos da Matemática

Breve história dos fundamentos da Matemática

- Georg Cantor (1878): deu início à teoria dos conjuntos, comparando cardinalidades de conjuntos através de funções bijetoras.

Breve história dos fundamentos da Matemática

- Georg Cantor (1878): deu início à teoria dos conjuntos, comparando cardinalidades de conjuntos através de funções bijetoras.
- Gottlob Frege (1884): tentou formalizar a matemática usando lógica e teoria dos conjuntos, identificando conjuntos com fórmulas.

Breve história dos fundamentos da Matemática

- Georg Cantor (1878): deu início à teoria dos conjuntos, comparando cardinalidades de conjuntos através de funções bijetoras.
- Gottlob Frege (1884): tentou formalizar a matemática usando lógica e teoria dos conjuntos, identificando conjuntos com fórmulas.
- Bertrand Russell (1901): provou que o sistema de Frege é inconsistente (paradoxo de Russell). Criou a teoria dos tipos como alternativa para formalizar a matemática. Escreveu com Alfred North Whitehead o *Principia Mathematica* (1910).

Breve história dos fundamentos da Matemática

- Georg Cantor (1878): deu início à teoria dos conjuntos, comparando cardinalidades de conjuntos através de funções bijetoras.
- Gottlob Frege (1884): tentou formalizar a matemática usando lógica e teoria dos conjuntos, identificando conjuntos com fórmulas.
- Bertrand Russell (1901): provou que o sistema de Frege é inconsistente (paradoxo de Russell). Criou a teoria dos tipos como alternativa para formalizar a matemática. Escreveu com Alfred North Whitehead o *Principia Mathematica* (1910).
- Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel (1908/1922): desenvolveram o sistema ZFC (Zermelo-Frankel-Choice, o último se refere ao axioma da escolha) para formalizar a matemática com teoria dos conjuntos. Dissociaram Lógica e Teoria dos Conjuntos.

- David Hilbert (1921): propôs o *programa de Hilbert*, como uma meta estabelecidos para os matemáticos para formalizar a matemática e provar que essa está livre de contradições.

- David Hilbert (1921): propôs o *programa de Hilbert*, como uma meta estabelecidos para os matemáticos para formalizar a matemática e provar que essa está livre de contradições.
- Kurt Gödel (1931): provou os teoremas de incompletude, mostrando que o objetivo de Hilbert não pode ser alcançado.

- David Hilbert (1921): propôs o *programa de Hilbert*, como uma meta estabelecidos para os matemáticos para formalizar a matemática e provar que essa está livre de contradições.
- Kurt Gödel (1931): provou os teoremas de incompletude, mostrando que o objetivo de Hilbert não pode ser alcançado.
- Alfred Tarski (1944): desenvolveu a semântica da lógica de primeira ordem, criando a noção de “verdade” matemática.

- David Hilbert (1921): propôs o *programa de Hilbert*, como uma meta estabelecidos para os matemáticos para formalizar a matemática e provar que essa está livre de contradições.
- Kurt Gödel (1931): provou os teoremas de incompletude, mostrando que o objetivo de Hilbert não pode ser alcançado.
- Alfred Tarski (1944): desenvolveu a semântica da lógica de primeira ordem, criando a noção de "verdade" matemática.
- Paul Cohen (1964): criou a técnica do *forcing* e provou a independência da Hipótese do Contínuo.

- Lógica: linguagem de sintaxe controlada e livre de contexto.

- Lógica: linguagem de sintaxe controlada e livre de contexto.
- Objetivo da lógica: tornar a matemática livre de paradoxos e questões ambíguas ou imprecisas.

- Lógica: linguagem de sintaxe controlada e livre de contexto.
- Objetivo da lógica: tornar a matemática livre de paradoxos e questões ambíguas ou imprecisas.
- Desvantagem da lógica: a linguagem lógica é mais rigorosa, mas menos expressiva do que a linguagem natural (no entanto, para a matemática é expressiva o suficiente).

Lógica Clássica

Lógica Clássica

- **Princípio da não contradição:** Uma fórmula P e sua negação $\neg P$ não podem ser ambas verdadeiras.

Lógica Clássica

- **Princípio da não contradição:** Uma fórmula P e sua negação $\neg P$ não podem ser ambas verdadeiras.
- **Princípio do terceiro excluído:** Uma fórmula P e sua negação $\neg P$ não podem ser ambas falsas.

Paradoxos da linguagem

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** “Esta afirmação é falsa”.

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** “Esta afirmação é falsa”.
- Problema da linguagem natural, mas, a princípio, não afeta diretamente a matemática.

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** "Esta afirmação é falsa".
- Problema da linguagem natural, mas, a princípio, não afeta diretamente a matemática.
- **Paradoxo de Richard:** "O menor número natural que não pode ser definido com menos de vinte palavras".

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** “Esta afirmação é falsa”.
- Problema da linguagem natural, mas, a princípio, não afeta diretamente a matemática.
- **Paradoxo de Richard:** “O menor número natural que não pode ser definido com menos de vinte palavras”.
- Afeta a matemática, mas apenas quando nos apoiamos na linguagem natural.

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** "Esta afirmação é falsa".
- Problema da linguagem natural, mas, a princípio, não afeta diretamente a matemática.
- **Paradoxo de Richard:** "O menor número natural que não pode ser definido com menos de vinte palavras".
- Afeta a matemática, mas apenas quando nos apoiamos na linguagem natural.
- **Paradoxo de Russell:** "O conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo." $\{x : x \notin x\}$

Paradoxos da linguagem

- **Paradoxo do mentiroso:** "Esta afirmação é falsa".
- Problema da linguagem natural, mas, a princípio, não afeta diretamente a matemática.
- **Paradoxo de Richard:** "O menor número natural que não pode ser definido com menos de vinte palavras".
- Afeta a matemática, mas apenas quando nos apoiamos na linguagem natural.
- **Paradoxo de Russell:** "O conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo." $\{x : x \notin x\}$
- Desta vez o paradoxo afeta a linguagem de um sistema formal, pois prova a inconsistência do sistema de Frege.

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;
- seja **finitário:** as fórmulas são sequências finitas dentre uma lista enumerável de símbolos, e as demonstrações são sequências finitas de fórmulas;

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;
- seja **finitário:** as fórmulas são sequências finitas dentre uma lista enumerável de símbolos, e as demonstrações são sequências finitas de fórmulas;
- possua um procedimento mecânico-sintático para verificar se uma sequência de símbolos é uma fórmula, e se uma sequência de fórmulas é uma demonstração válida;

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;
- seja **finitário:** as fórmulas são sequências finitas dentre uma lista enumerável de símbolos, e as demonstrações são sequências finitas de fórmulas;
- possua um procedimento mecânico-sintático para verificar se uma sequência de símbolos é uma fórmula, e se uma sequência de fórmulas é uma demonstração válida;
- seja **completo:** dada uma sentença (fórmula sem variáveis livres), deve existir uma demonstração para ela ou para sua negação;

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;
- seja **finitário:** as fórmulas são sequências finitas dentre uma lista enumerável de símbolos, e as demonstrações são sequências finitas de fórmulas;
- possua um procedimento mecânico-sintático para verificar se uma sequência de símbolos é uma fórmula, e se uma sequência de fórmulas é uma demonstração válida;
- seja **completo:** dada uma sentença (fórmula sem variáveis livres), deve existir uma demonstração para ela ou para sua negação;
- seja **consistente:** não pode provar uma fórmula e sua negação;

Programa de Hilbert: procurar um sistema lógico que

- seja capaz de expressar toda a matemática;
- seja **finitário:** as fórmulas são sequências finitas dentre uma lista enumerável de símbolos, e as demonstrações são sequências finitas de fórmulas;
- possua um procedimento mecânico-sintático para verificar se uma sequência de símbolos é uma fórmula, e se uma sequência de fórmulas é uma demonstração válida;
- seja **completo:** dada uma sentença (fórmula sem variáveis livres), deve existir uma demonstração para ela ou para sua negação;
- seja **consistente:** não pode provar uma fórmula e sua negação;
- consiga provar sua própria completude e consistência.

Teoremas de Gödel-Rosser

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;
- recursivo (equivalentemente, Turing-computável);

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;
- recursivo (equivalentemente, Turing-computável);
- consistente;

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;
- recursivo (equivalentemente, Turing-computável);
- consistente;

Então o sistema:

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;
- recursivo (equivalentemente, Turing-computável);
- consistente;

Então o sistema:

- é incompleto;

Teoremas de Gödel-Rosser

Se um sistema é:

- finitário;
- capaz de expressar a aritmética;
- recursivo (equivalentemente, Turing-computável);
- consistente;

Então o sistema:

- é incompleto;
- não pode provar sua própria consistência.

Consequências dos Teoremas de Gödel na Teoria dos Conjuntos

- Se T é uma teoria, defina $Con(T)$ a afirmação "T é consistente";

- Se T é uma teoria, defina $Con(T)$ a afirmação "T é consistente";
- Pelo Teorema da Completude, $Con(ZFC)$ é equivalente a: "existe um modelo (M, ε) que satisfaz ZFC";

- Se T é uma teoria, defina $Con(T)$ a afirmação "T é consistente";
- Pelo Teorema da Completude, $Con(ZFC)$ é equivalente a: "existe um modelo (M, ε) que satisfaz ZFC";
- Pelo Teorema do Colapso de Mostowski, $Con(ZFC)$ é equivalente a: "existe um conjunto M tal que φ^M (a fórmula φ *relativizada* a M) é verdadeira, para todo axioma φ de ZFC" (notação: $M \models ZFC$);

- Se T é uma teoria, defina $Con(T)$ a afirmação "T é consistente";
- Pelo Teorema da Completude, $Con(ZFC)$ é equivalente a: "existe um modelo (M, ε) que satisfaz ZFC";
- Pelo Teorema do Colapso de Mostowski, $Con(ZFC)$ é equivalente a: "existe um conjunto M tal que φ^M (a fórmula φ *relativizada* a M) é verdadeira, para todo axioma φ de ZFC" (notação: $M \models ZFC$);
- Pelo Segundo Teorema de Incompletude de Gödel: se ZFC é consistente, ZFC não prova $Con(ZFC)$.

- φ é *relativamente consistente* com uma teoria T se $Con(T) \rightarrow Con(T + \varphi)$;

- φ é *relativamente consistente* com uma teoria T se $Con(T) \to Con(T + \varphi)$;
- Gödel (1940): $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + CH)$;

- φ é *relativamente consistente* com uma teoria T se $Con(T) \to Con(T + \varphi)$;
- Gödel (1940): $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + CH)$;
- Cohen (1964): $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg CH)$.

Exemplos de consistência relativa

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);
- Construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$;

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);
- Construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$;
- Construímos $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$;

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);
- Construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$;
- Construímos $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$;
- Definimos a aritmética em ZFC;

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);
- Construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$;
- Construímos $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$;
- Definimos a aritmética em ZFC;
- Prova-se a consistência relativa de ZFC a partir de ZF;

Exemplos de consistência relativa

- A partir de um modelo para a geometria euclidiana, podemos construir um modelo para a geometria hiperbólica (disco de Klein, disco de Poincaré);
- A partir de $\mathbb{R}^3$ construímos um modelo para a geometria euclidiana;
- Assumindo a existência de $\mathbb{Q}$, construímos $\mathbb{R}$ (cortes de Dedekind, sequências de Cauchy);
- Construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$;
- Construímos $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$;
- Definimos a aritmética em ZFC;
- Prova-se a consistência relativa de ZFC a partir de ZF;
- Torcemos para ZF ser consistente.

Cardinais inacessíveis

Cardinais inacessíveis

Um cardinal κ é (fortemente) **inacessível** se:

Cardinais inacessíveis

Um cardinal κ é (fortemente) **inacessível** se:

- $\omega < \kappa$;

Cardinais inacessíveis

Um cardinal κ é (fortemente) **inacessível** se:

- $\omega < \kappa$;
- $\lambda < \kappa$ implica $2^\lambda < \kappa$;

Cardinais inacessíveis

Um cardinal κ é (fortemente) **inacessível** se:

- $\omega < \kappa$;
- $\lambda < \kappa$ implica $2^\lambda < \kappa$;
- κ não é limite de uma sequência de tamanho menor do que κ de cardinais menores do que κ;

Seja κ cardinal

Seja κ cardinal

- Existe $H(\kappa)$ o conjunto dos conjuntos cujos fechos transitivos têm cardinalidades menores do que κ;

Seja κ cardinal

- Existe $H(\kappa)$ o conjunto dos conjuntos cujos fechos transitivos têm cardinalidades menores do que κ;
- Se κ é inacessível, $H(\kappa) \models ZFC$.

Seja I a sentença "existe um cardinal inacessível".

Seja I a sentença "existe um cardinal inacessível".

Teoremas

Seja I a sentença "existe um cardinal inacessível".

Teoremas

- $ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + \neg I)$;

Seja I a sentença "existe um cardinal inacessível".

Teoremas

- $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + \neg I)$;
- Se ZFC é consistente, ZFC não prova $Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$.

Demonstração:

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$;

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;
- Em particular $ZFC + I \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;
- Em particular $ZFC + I \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;
- Mas $ZFC + I \vdash Con(ZFC)$;

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$;
- Em particular $ZFC + I \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$;
- Mas $ZFC + I \vdash Con(ZFC)$;
- Logo, por *modus ponens*: $ZFC + I \vdash Con(ZFC + I)$;

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;
- Em particular $ZFC + I \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + I)$;
- Mas $ZFC + I \vdash Con(ZFC)$;
- Logo, por *modus ponens*: $ZFC + I \vdash Con(ZFC + I)$;
- Portanto, pelo Segundo Teorema de Incompletude de Gödel, $ZFC + I$ é inconsistente;

Demonstração:

- Suponha $ZFC \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$;
- Em particular $ZFC + I \vdash Con(ZFC) \to Con(ZFC + I)$;
- Mas $ZFC + I \vdash Con(ZFC)$;
- Logo, por *modus ponens*: $ZFC + I \vdash Con(ZFC + I)$;
- Portanto, pelo Segundo Teorema de Incompletude de Gödel, $ZFC + I$ é inconsistente;
- Logo, pela hipótese, ZFC é inconsistente.

Função recursiva

Função recursiva

Uma função $\phi : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ é *recursiva* se existe uma sequência de funções $\phi_0, \ldots, \phi_m$ tal que ϕ é a função ϕ_m e, para cada $k \leq m$, ocorre um dos seguintes casos:

- ϕ_k é constante;

- ϕ_k é constante;
- $\phi_k(x) = x + 1$;

- ϕ_k é constante;
- $\phi_k(x) = x + 1$;
- existem $j < k$ e $i \leq n \in \mathbb{N}$ tais que $dom(\phi_k) = \mathbb{N}^n$, $dom(\phi_j) = \mathbb{N}^{n-1}$ e

$$\phi_k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \phi_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

- existem $p, p_1, \ldots, p_n < k$ tais que

$$\phi_k(x_1, \ldots, x_n) = \phi_p(\phi_{p_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{p_n}(x_1, \ldots, x_n));$$

- ϕ_k é constante;
- $\phi_k(x) = x + 1$;
- existem $j < k$ e $i \leq n \in \mathbb{N}$ tais que $dom(\phi_k) = \mathbb{N}^n$, $dom(\phi_j) = \mathbb{N}^{n-1}$ e

$$\phi_k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \phi_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

- existem $p, p_1, \ldots, p_n < k$ tais que

$$\phi_k(x_1, \ldots, x_n) = \phi_p(\phi_{p_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{p_n}(x_1, \ldots, x_n));$$

- existem $i < k$ e $c \in \mathbb{N}$ tais que

$$\phi_k(0) = c \text{ e } \phi_k(x+1) = \phi_i(x, \phi_k(x));$$

- ϕ_k é constante;
- $\phi_k(x) = x + 1$;
- existem $j < k$ e $i \leq n \in \mathbb{N}$ tais que $dom(\phi_k) = \mathbb{N}^n$, $dom(\phi_j) = \mathbb{N}^{n-1}$ e
$$\phi_k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \phi_j(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n);$$
- existem $p, p_1, \dots, p_n < k$ tais que
$$\phi_k(x_1, \dots, x_n) = \phi_p(\phi_{p_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_{p_n}(x_1, \dots, x_n));$$
- existem $i < k$ e $c \in \mathbb{N}$ tais que
$$\phi_k(0) = c \text{ e } \phi_k(x + 1) = \phi_i(x, \phi_k(x));$$
- existem $i, j < k$ tais que
$$\phi_k(0, x_2, \dots, x_n) = \phi_i(x_2, \dots, x_n) \text{ e}$$
$$\phi_k(x + 1, x_2, \dots, x_n) = \phi_j(x, \phi_k(x, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n);$$

Esboço da demonstração dos Teoremas de Incompletude de Gödel

Numeração de Gödel:

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;
- A uma *string* $s_1 \dots s_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número natural associado ao símbolo s_i;

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;
- A uma *string* $s_1 \ldots s_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número natural associado ao símbolo s_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da *string*;

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;
- A uma *string* $s_1 \dots s_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número natural associado ao símbolo s_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da *string*;
- A uma sequência finita de *strings* $A_1, \dots, A_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número de Gödel da *string* A_i;

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;
- A uma *string* $s_1 \dots s_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número natural associado ao símbolo s_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da *string*;
- A uma sequência finita de *strings* $A_1, \dots, A_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número de Gödel da *string* A_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da sequência de *strings*;

Numeração de Gödel:

- Associamos um número natural (não nulo) a cada símbolo da linguagem;
- A uma *string* $s_1 \dots s_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número natural associado ao símbolo s_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da *string*;
- A uma sequência finita de *strings* $A_1, \dots, A_k$ associamos o número natural $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, onde p_i é o i-ésimo número primo e n_i o número de Gödel da *string* A_i;
- Esse número é chamado de *número de Gödel* da sequência de *strings*;
- Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é *recursivo* se existe uma função recursiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 0$ se, e somente se, n é o número de Gödel de uma fórmula que pertence a Γ.

Ideia da prova de Gödel:

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa "a fórmula de número n não pode ser provada";

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa "a fórmula de número n não pode ser provada";
- Encontrar um número natural tal que a sentença obtida substituindo n por esse número tenha, como número de Gödel, esse mesmo número;

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa "a fórmula de número n não pode ser provada";
- Encontrar um número natural tal que a sentença obtida substituindo n por esse número tenha, como número de Gödel, esse mesmo número;
- Com isso criamos uma sentença φ que diz "a sentença φ não pode ser provada";

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa "a fórmula de número n não pode ser provada";
- Encontrar um número natural tal que a sentença obtida substituindo n por esse número tenha, como número de Gödel, esse mesmo número;
- Com isso criamos uma sentença φ que diz "a sentença φ não pode ser provada";
- Se provarmos $\neg\varphi$, provamos que "a sentença φ pode ser provada". Logo, existe uma prova para φ, e o sistema é inconsistente;

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa “a fórmula de número n não pode ser provada”;
- Encontrar um número natural tal que a sentença obtida substituindo n por esse número tenha, como número de Gödel, esse mesmo número;
- Com isso criamos uma sentença φ que diz “a sentença φ não pode ser provada”;
- Se provarmos $\neg\varphi$, provamos que “a sentença φ pode ser provada”. Logo, existe uma prova para φ, e o sistema é inconsistente;
- Se provarmos φ, provamos que “a sentença φ pode ser provada”, que é a negação de φ, obtendo novamente que o sistema é inconsistente;

Ideia da prova de Gödel:

- Criar uma fórmula da linguagem que significa "a fórmula de número n não pode ser provada";
- Encontrar um número natural tal que a sentença obtida substituindo n por esse número tenha, como número de Gödel, esse mesmo número;
- Com isso criamos uma sentença φ que diz "a sentença φ não pode ser provada";
- Se provarmos $\neg\varphi$, provamos que "a sentença φ pode ser provada". Logo, existe uma prova para φ, e o sistema é inconsistente;
- Se provarmos φ, provamos que "a sentença φ pode ser provada", que é a negação de φ, obtendo novamente que o sistema é inconsistente;
- Como a prova acima pode ser codificada no sistema, se provarmos que o sistema é consistente, provamos, em particular, que "φ não pode ser provada". Mas essa é a própria sentença φ.

Principais dificuldades:

Principais dificuldades:

- Codificar a relação unária "a fórmula de número n não pode ser provada" na linguagem;

Principais dificuldades:

- Codificar a relação unária "a fórmula de número *n* não pode ser provada" na linguagem;
- Criar um "ponto fixo" na fórmula acima, isto é, um valor de *n* para o qual a sentença obtida após a substituição tenha esse mesmo valor;

Principais dificuldades:

- Codificar a relação unária “a fórmula de número n não pode ser provada” na linguagem;
- Criar um “ponto fixo” na fórmula acima, isto é, um valor de n para o qual a sentença obtida após a substituição tenha esse mesmo valor;
- Para isso, Gödel utilizou a ideia da “diagonal de Cantor”.

Defina:

Defina:

- $t(n)$ o termo $1+\ldots+1$, n vezes

Defina:

- $t(n)$ o termo $1 + \ldots + 1$, n vezes (no caso, n é uma *metavariável* e $t(n)$ é um *termo constante*);

Defina:

- $t(n)$ o termo $1+\ldots+1$, n vezes (no caso, n é uma *metavariável* e $t(n)$ é um *termo constante*);
- $A[t]$ a fórmula obtida pela substituição de todas as ocorrências livres das variáveis em A pelo termo t;

Defina:

- $t(n)$ o termo $1 + \ldots + 1$, n vezes (no caso, n é uma *metavariável* e $t(n)$ é um *termo constante*);
- $A[t]$ a fórmula obtida pela substituição de todas as ocorrências livres das variáveis em A pelo termo t;
- Φ_n a sequência de símbolos do alfabeto de L cujo número de Gödel é n;

Defina:

- $t(n)$ o termo $1 + \ldots + 1$, n vezes (no caso, n é uma *metavariável* e $t(n)$ é um *termo constante*);
- $A[t]$ a fórmula obtida pela substituição de todas as ocorrências livres das variáveis em A pelo termo t;
- Φ_n a sequência de símbolos do alfabeto de L cujo número de Gödel é n;
- $\overline{D}$ o conjunto das triplas $(p, m, k) \in \mathbb{N}^3$ tais que p é o número de Gödel de uma demonstração de $\Phi_m[t(k)]$.

Proposição V, de Gödel:

Proposição V, de Gödel:

Se o sistema Γ é recursivo e capaz de expressar a aritmética, existe uma fórmula $D(x, y, z)$ na linguagem tal que

Proposição V, de Gödel:

Se o sistema Γ é recursivo e capaz de expressar a aritmética, existe uma fórmula $D(x, y, z)$ na linguagem tal que

- Se $(p, m, k) \in \overline{D}$ então $\Gamma \vdash D(t(p), t(m), t(k))$;

Proposição V, de Gödel:

Se o sistema Γ é recursivo e capaz de expressar a aritmética, existe uma fórmula $D(x, y, z)$ na linguagem tal que

- Se $(p, m, k) \in \overline{D}$ então $\Gamma \vdash D(t(p), t(m), t(k))$;
- Se $(p, m, k) \notin \overline{D}$ então $\Gamma \vdash \neg D(t(p), t(m), t(k))$.

- Seja n o número de Gödel da fórmula $\neg\exists x D(x, y, z)$;

- Seja n o número de Gödel da fórmula $\neg\exists x D(x, y, z)$;
- Defina φ a fórmula $\neg\exists x D(x, t(n), t(n))$;

- Seja n o número de Gödel da fórmula $\neg\exists x D(x, y, z)$;
- Defina φ a fórmula $\neg\exists x D(x, t(n), t(n))$;
- φ significa "a fórmula $\Phi_n[t(n)]$ não pode ser provada";

- Seja n o número de Gödel da fórmula $\neg\exists x D(x, y, z)$;
- Defina φ a fórmula $\neg\exists x D(x, t(n), t(n))$;
- φ significa "a fórmula $\Phi_n[t(n)]$ não pode ser provada";
- φ é a própria fórmula $\Phi_n[t(n)]$.

Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel

- Γ é ω-*consistente* $\Leftrightarrow$ se $\Gamma \vdash P(t(n))$, para todo $n \in \omega$, então não ocorre $\Gamma \vdash \exists x \in \mathbb{N} \neg P(x)$.

Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel

- Γ é ω-*consistente* $\Leftrightarrow$ se $\Gamma \vdash P(t(n))$, para todo $n \in \omega$, então não ocorre $\Gamma \vdash \exists x \in \mathbb{N} \neg P(x)$.
- Primeiro Teorema de Gödel (enunciado original): se Γ é uma teoria recursiva, capaz de expressar a aritmética e ω-consistente, então Γ é incompleto.

Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel

- Γ é *ω-consistente* $\Leftrightarrow$ se $\Gamma \vdash P(t(n))$, para todo $n \in \omega$, então não ocorre $\Gamma \vdash \exists x \in \mathbb{N} \neg P(x)$.
- Primeiro Teorema de Gödel (enunciado original): se Γ é uma teoria recursiva, capaz de expressar a aritmética e ω-consistente, então Γ é incompleto.
- Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Tome p o número de Gödel da demonstração de φ. Como φ é $\Phi_n[t(n)]$, temos $(p, n, n) \in \overline{D}$ e $\Gamma \vdash D(t(p), t(n), t(n))$. Logo, $\Gamma \vdash \exists x D(x, t(n), t(n))$. Mas essa é a fórmula $\neg\varphi$.

Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel

- Γ é ω-*consistente* $\Leftrightarrow$ se $\Gamma \vdash P(t(n))$, para todo $n \in \omega$, então não ocorre $\Gamma \vdash \exists x \in \mathbb{N} \neg P(x)$.
- Primeiro Teorema de Gödel (enunciado original): se Γ é uma teoria recursiva, capaz de expressar a aritmética e ω-consistente, então Γ é incompleto.
- Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Tome p o número de Gödel da demonstração de φ. Como φ é $\Phi_n[t(n)]$, temos $(p, n, n) \in \overline{D}$ e $\Gamma \vdash D(t(p), t(n), t(n))$. Logo, $\Gamma \vdash \exists x D(x, t(n), t(n))$. Mas essa é a fórmula $\neg\varphi$.
- Suponha que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Isto é, $\Gamma \vdash \exists x D(x, t(n), t(n))$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(p, n, n) \in \overline{D}$, pois, caso contrário, teríamos, $\Gamma \vdash \neg D(t(p), t(n), t(n))$, para todo $p \in \mathbb{N}$ (proposição V), contradizendo que Γ é ω-consistente. Logo, existe uma demonstração de $\Phi_n[t(n)]$ e, portanto, $\Gamma \vdash \varphi$.

Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel

- Γ é ω-*consistente* $\Leftrightarrow$ se $\Gamma \vdash P(t(n))$, para todo $n \in \omega$, então não ocorre $\Gamma \vdash \exists x \in \mathbb{N} \neg P(x)$.
- Primeiro Teorema de Gödel (enunciado original): se Γ é uma teoria recursiva, capaz de expressar a aritmética e ω-consistente, então Γ é incompleto.
- Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Tome p o número de Gödel da demonstração de φ. Como φ é $\Phi_n[t(n)]$, temos $(p, n, n) \in \overline{D}$ e $\Gamma \vdash D(t(p), t(n), t(n))$. Logo, $\Gamma \vdash \exists x D(x, t(n), t(n))$. Mas essa é a fórmula $\neg\varphi$.
- Suponha que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Isto é, $\Gamma \vdash \exists x D(x, t(n), t(n))$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(p, n, n) \in \overline{D}$, pois, caso contrário, teríamos, $\Gamma \vdash \neg D(t(p), t(n), t(n))$, para todo $p \in \mathbb{N}$ (proposição V), contradizendo que Γ é ω-consistente. Logo, existe uma demonstração de $\Phi_n[t(n)]$ e, portanto, $\Gamma \vdash \varphi$.
- Rosser (1936) aperfeiçoou a prova de Gödel trocando a hipótese de ω-consistência por apenas consistência.

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;
- Como Γ expressa a aritmética, o argumento do primeiro teorema de Gödel dá para ser formalizado em Γ;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;
- Como Γ expressa a aritmética, o argumento do primeiro teorema de Gödel dá para ser formalizado em Γ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \to \neg \exists x D(x, t(n), t(n)))$;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;
- Como Γ expressa a aritmética, o argumento do primeiro teorema de Gödel dá para ser formalizado em Γ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \rightarrow \neg\exists x D(x, t(n), t(n)))$;
- Mas $\neg\exists x D(x, t(n), t(n))$ é a fórmula φ;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;
- Como Γ expressa a aritmética, o argumento do primeiro teorema de Gödel dá para ser formalizado em Γ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \rightarrow \neg\exists x D(x, t(n), t(n)))$;
- Mas $\neg\exists x D(x, t(n), t(n)))$ é a fórmula φ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \rightarrow \varphi)$;

Segundo Teorema de Incompletude de Gödel

- Mostramos que, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é inconsistente;
- Logo, $Con(\Gamma)$ implica $\Gamma \nvdash \varphi$;
- Como Γ expressa a aritmética, o argumento do primeiro teorema de Gödel dá para ser formalizado em Γ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \rightarrow \neg\exists x D(x, t(n), t(n)))$;
- Mas $\neg\exists x D(x, t(n), t(n)))$ é a fórmula φ;
- Logo, $\Gamma \vdash (Con(\Gamma) \rightarrow \varphi)$;
- Logo, se $\Gamma \vdash Con(\Gamma)$, por *modus ponens* temos $\Gamma \vdash \varphi$, o que, como vimos, implica que Γ é inconsistente.

Temas para o trabalho

1. Demonstração de Rosser do primeiro teorema de incompletude (assumindo consistência, em vez de ω-consistência);
2. As definições de computabilidade (Gödel, Turing, Church) e os teoremas de equivalência (só enunciado);
3. Exemplos de conjeturas de outras áreas da matemática (análise, álgebra, geometria) que foram provadas independentes de ZFC;
4. Exemplos de teoremas de outras áreas da matemática (análise, álgebra, geometria) que só foram provadas assumindo a consistência da existência de um cardinal inacessível;
5. Pequenos cardinais: o que são e como se relacionam com resultados matemáticos de outras áreas;
6. A história do surgimento e desenvolvimento do sistema ZFC, até chegar a sua forma atual.

Regras para o trabalho

- O(a) aluno(a) deverá escolher um tema da lista anterior;
- O trabalho deverá ser entregue por e-mail em versão eletrônica para o endereço `fajardo@ime.usp.br`, com o título “Trabalho - MAT0554 - Panorama de Matemática”;
- O trabalho é individual;
- Prazo de entrega: 20 de novembro de 2017;
- Todos os resultados e fatos citados devem ser devidamente referenciados;
- A presença de plágio acarretará na redução ou anulamento da nota, dependendo da gravidade desse;
- Estes slides estarão disponíveis em `http://www.ime.usp.br/~fajardo/godel.pdf`