MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

1ª Lista de Exercícios

1 Exercícios preparatórios

1. Você já deve ter aprendido que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Isto é, ele *não* pode ser representado por uma fração $\dfrac{p}{q}$ com p e q números inteiros e $q \neq 0$. Você sabe provar isso? Daremos aqui um esboço da demonstração. Este é um exemplo de uma *demonstração por absurdo*:
"Suponha que existam números inteiros p e q com $q \neq 0$ e $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos supor que p e q são números *primos entre si*. Então $p^2 = 2q^2$. Logo p é par, ou seja, $p = 2k$ para algum inteiro k. Mas isto implica que $4k^2 = 2q^2$ e então $q^2 = 2k^2$. Portanto q é par. Chegamos assim a uma contradição, pois supusemos que p e q são primos entre si. Esta contradição prova a afirmação que $\sqrt{2}$ é irracional."
Preencha todos os detalhes desta demonstração. Se p é um número primo qualquer, você é capaz de provar que $\sqrt{p}$ é irracional?

2. Resolva as inequações:
(a) $x(2x-1)(x+1) > 0$ (b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$
(c) $(x+1000)^2 \geq x + 1000$ (d) $|4 - x^2| \leq \dfrac{x+7}{2}$

3. Decida quais afirmaçoes são verdadeiras:
(a) $x - 1 < 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 9$ (b) $\dfrac{x-1}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{1}{x} > 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$ e $x \neq 0$ (d) $(x^2-5)^2 < 4(x^2+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 2(x^2+1)$
(e) Se $x \neq 2$ então $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x-2)$

4. Resolva os sistemas:
(a) $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^2 = x + 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

5. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:
(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4|$ (c) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
(d) $f(x) = x - |x|$ (e) $f(x) = |3x + 5|$ (f) $f(x) = 3\cos(2x)$
(g) $f(x) = \sqrt{x+3}$ (h) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi/2)$ (i) $f(x) = x^3 - 9$
(j) $f(x) = (x+5)^4 - 3$ (k) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}{x+3}$ (l) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$
(m) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9} + 2$ (n) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (o) $f(x) = \sqrt{-x}$

6. Resolva as inequações:
(a) $|\operatorname{sen} x| > \frac{1}{2}$ (b) $|x^2 - 4| > 2|x^2 - 1|$

7. Tente esboçar o gráfico de:

   (a) $f(x) = x\text{sen}x$ (b) $f(x) = \text{sen}\dfrac{1}{x}$ (c) $f(x) = x\text{sen}\dfrac{1}{x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$ (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

8. Seja $n > 0$ um inteiro e $a, b, x \in \mathbb{R}$. Verifique que:

   (a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i\right)$

   (b) $x - a = (\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4})$

   (c) $(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) = 1$

9. Use o exercício 8 para determinar a expressão que deve ser colocada em (...) para que a igualdade seja verdadeira.

   (a) $x - 8 = (\sqrt[3]{x} - 2)(...)$

   (b) $x^2 + x = (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(...)$

   (c) $x^4 = (\sqrt[4]{x^4+1} - 1)(...)$

2 Limites de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{-x^3 - 2x^2 + 4x + 8}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+16} - 5}{x^2 + 3x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+12} - 4}{2 - \sqrt{x^3 - 4}}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\sqrt[4]{2x} - 1}{\sqrt{2x - 1}}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^4+1} - 1}{x^4}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}}$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(20x)}{\text{sen}(301x)}$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}(2x))}{x}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\,\text{tg}(3x)\ \text{cossec}(6x)\,)$ 11) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ 12) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

13) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ 14) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(3x^2 - 5x + 2)}{x^2 + x - 2}$ 15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\ x}{x^3 - x^2}$

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^3(x)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$ 17) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x}$ 18) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

19) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x^3-1)\cos\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$ 20) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ 21) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

22) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{2 - x + 5x^2 - 4x^3}$ 23) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$ 24) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$

25) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \text{sen}\,x}{x + \text{sen}\,x}$ 26) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+1}\right)$ 27) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{7x^6 + 5x^4 + 7}}{x^4 + 2}$

28) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^5 + 2x - 8}{\sqrt{x^6 + x + 1}}$ 29) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+9} + x + 3)$ 30) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 2x)\,\text{sen}(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{4x}}$

31) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 + x\cos(\sqrt{x})}{x^4 \operatorname{sen}(1/x) + 1}$ 32) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(\operatorname{sen} x + \sqrt{x}\cos x)}{x\sqrt{x} - \operatorname{sen}(x\sqrt{x})}$ 33) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[4]{7x^{12} + 5x^4 + 7}}{2x^3 + 2}$

34) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\,)$ 35) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{2-x}{(1-x)^3}\right)$ 36) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2x}\right)$

Resp.: 1) $-3/4$; 2) $1/5$; 3) $-1/6$; 4) 0 ; 5) $1/5$; 6) $3/7$; 7) 2 ; 8) $\frac{20}{301}$; 9) 2 ; 10) $1/2$; 11) $1/6$; 12) -1 ; 13) -1 ; 14) $1/3$; 15) $-\infty$; 16) 0 ; 17) $\nexists$; 18) $\nexists$; 19) 0 ; 20) $-\infty$; 21) $+\infty$; 22) $-1/2$; 23) 0 ; 24) $1/3$; 25) 1 ; 26) $-\infty$; 27) 0 ; 28) $-\infty$; 29) 3 ; 30) $32\sqrt{2}$; 31) 3 ; 32) 0 ; 33) $-\sqrt[4]{7}/2$; 34) $1/2$; 35) $-\pi/2$; 36) $\pi/6$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\big|f(x)\big| \le 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$. Resp.: 0.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $1 + x^2 + \dfrac{x^6}{3} \le f(x) + 1 \le \sec x^2 + \dfrac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(f(x)\cos\left(\frac{1}{x + x^2}\right)\right)$. Resp.: 0; 0.

4. Sejam f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x| \le f(x) \le 3\,|x|$ e $0 \le g(x) \le 1 + |\operatorname{sen} x\,|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\, f(x)\, g(x) + \cos x\,)$ Resp.: 1.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (a) Assumindo que $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x}$. Resp.: 2.

   (b) Assumindo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. Resp.: 0.

   (c) Assumindo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = +\infty$, calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Resp.: $+\infty$.

6. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2 + x} - x\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\underbrace{\Big(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 1\Big)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x \cdot 0) = 0.$$

7. Mostre que, se $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada, então $\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

3 Continuidade de Funções

1. Determine o conjunto dos pontos em que a função $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x>2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x<2 \\ 5, & \text{se } x=2 \end{cases}$, é contínua. Resp.: $\mathbb{R}$.

2. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

   (a) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3}{x+2}\right)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-4x+3|}{x-3} & \text{, se } x \neq 3 \\ 1 & \text{, se } x=3 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right) & \text{, se } x \neq 3 \\ -2 & \text{, se } x=3 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} & \text{, se } x \neq 1 \\ 0 & \text{, se } x=1 \end{cases}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro de x, definido por $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.

   Resp.: a) $]-\infty,-5] \cup [1,+\infty[$; b) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; e) $\mathbb{R}$.

3. Determine L para que a função dada seja contínua em $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+2)-\operatorname{sen}(x+2)}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ L & \text{, se } x=0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^8+x^4}}{x^2} & \text{, se } x \neq 0 \\ L & \text{, se } x=0 \end{cases}$

   Resp.: (a) $-\cos 2$; (b) 1 .

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1} & \text{, se } x \neq 1 \\ 1 & \text{, se } x=1 \end{cases}$. Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x=1$? Por que? Resp.: Não.

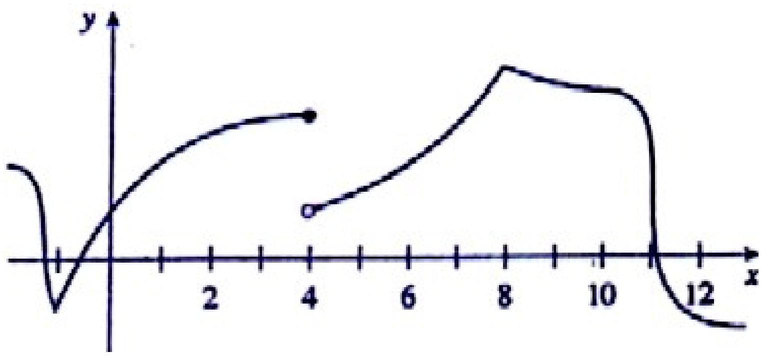
5. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x=0$, então f é contínua em $x=0$. Resp.: Falsa.

   (b) Se $f\,,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções descontínuas em $x=0$, então a função fg é descontínua em $x=0$. Resp.: Falsa.

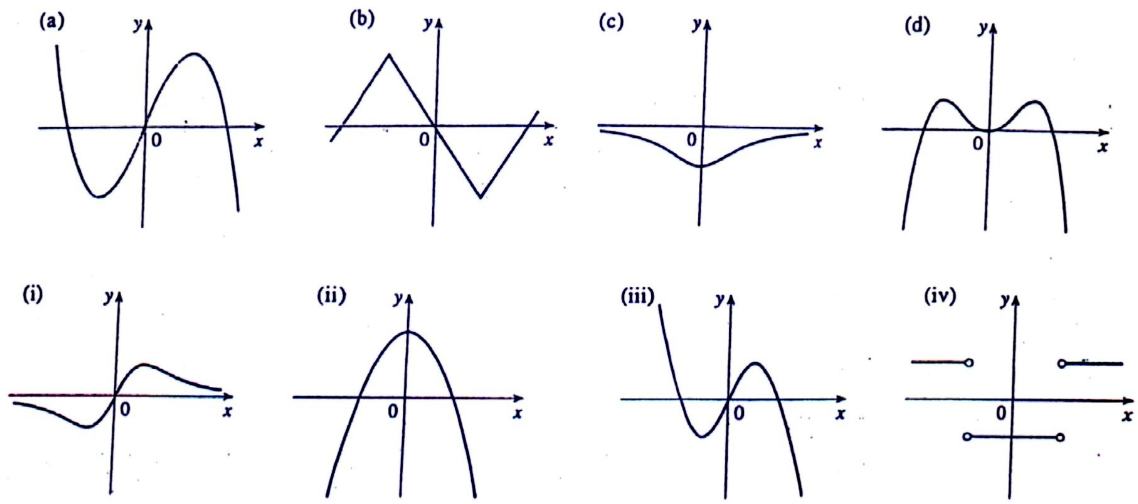
4 Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



Resp.: -1 ; 4 ; 8 ; 11 .

2. Associe os gráficos de cada função de (a) a (d) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (i) a (iv).



Resp.: (a) e (ii) ; (b) e (iv) ; (c) e (i) ; (d) e (iii) .

3. Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto $\mathbf{I}$, $a \in \mathbf{I}$ e $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } x \geq a \\ g(x) & , \text{se } x < a \end{cases}$.
Prove que h é derivável em $x = a$ se, e somente se, $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.

4. Encontre constantes a, b e c tais que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6 & , \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $I\!R$ e $f'(0) = 0$. Resp.: $a = -3/2$, $b = 0$; $c = 7/2$.

5. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x} & , \text{se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}} & , \text{se } x > 1 \\ 1 & , \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x & , \text{se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3 & , \text{se } x < 0 \\ 0 & , \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & , \text{se } x > 1 \\ x^4 & , \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ (f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ (obs: $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, para todo $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$)

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

(i) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x_0 = 0$ $\qquad$ j) $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0 = 0$ $\qquad$ k) $f(x) = \cos(\sqrt{|x|})$, $x_0 = 0$

Resp.: *são contínuas em x_0:* (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i), (j), (k) ; *são deriváveis em x_0:* (f), (g), (j).

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}[(3+x)^2] - \operatorname{tg} 9}{x}$. Resp: $6 \sec^2 9$.

7. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad$ 2) $f(x) = \dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$ $\qquad$ 3) $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^5} - x^2\right)$ $\qquad$ 5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$ $\qquad$ 6) $f(x) = \sqrt[6]{x \operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{cossec} x}{x^3 + 3x^2}$ $\qquad$ 8) $f(x) = \sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad$ 9) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x}$

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ $\qquad$ 11) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$ $\qquad$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

13) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad$ 14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$ $\qquad$ 15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^{33} x \cos^{17} x}$

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos(x^2)}$ $\qquad$ 17) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{arctg}(x^3+1)}{x^2 + \cos(50x)} + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$

8. Verifique que:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}\right] = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{-1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}\right)\right] = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é derivável em 0? Resp.: Sim .

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $a \in \left] 0, +\infty \right[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.
Resp.: $2\sqrt{a}\, f'(a)$.

11. Analise as seguintes "soluções" para a questão abaixo.

Questão. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações.

"solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:

$$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$

como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

"solução" 4. Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, se } x < 0 \\ x^2 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$. Logo $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$. Portanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

Resp.: somente a solução 4 está correta.

12. Seja $f : I\!R \to I\!R$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : I\!R \to I\!R$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)\,g(x)$ no ponto $x = 0$. Resp.: 0.

13. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência. Resp: $(3, -3)$.

14. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.
Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

15. Seja $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$. Resp.: $y = -9x$; $y = -x$

16. Sejam $f : I\!R \to I\!R$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : I\!R \to I\!R$ dada por $g(x) = xf(x + 1 + \operatorname{sen} 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -8.

17. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in I\!R$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique. Resp.: Não .

18. Sabe-se que $f : I\!R \to I\!R$ é uma função derivável em $I\!R$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : I\!R \to I\!R$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}\,))^2$. Determine $g'(0)$.
Resp.: -1.

19. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como intersecção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

20. Sejam $f(x) = 2x + \cos x$ e g a função inversa de f. Admitindo g derivável, determine $g'(1)$. Resp.: $\frac{1}{2}$.

21. Sejam $f(x) = \dfrac{7x^3 - 1}{x^2 + 1}$, para $x > 0$ e g a função inversa de f. Admitindo g derivável, verifique se a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(3, g(3))$ é normal à reta $2y + 15x + 1 = 0$. Resp.: Sim.

22. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f. Admitindo g derivável até a segunda ordem, calcule $g''(0)$. $\frac{-3}{256}$.

23. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$. $y = x$.

24. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$. Resp.: $y + x = 2$; $y + x = -2$.

25. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $\operatorname{arctg}(y^2) + 2xy + 27 = 3x^2$. Admitindo f derivável em seu domínio $\mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é um intervalo aberto de $I\!R$ contido em $]-5,1[$, determine a equação da reta que é normal ao gráfico de f e paralela à reta $3y + x = 1$. Resp.: $3y + x + 3 = 0$.

5 Taxa de Variação

1. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 1,3\,p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.

2. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h, onde r cresce e h decresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \dfrac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.

3. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de 2cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo? Resp.: $-1{,}6$cm/min.

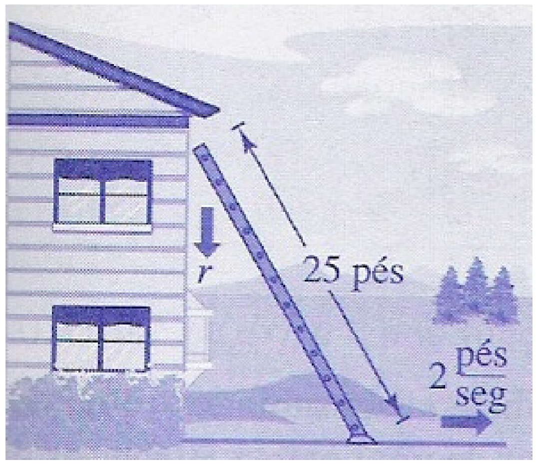
4. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual à três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3$/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante? Resp.: $\dfrac{1}{40\pi}$ m/min.

5. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de 10cm^3/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo? Resp.: $\dfrac{4}{3}$ cm^2/min.

6. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de $1,8$m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2$m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício. Resp.: $3,6$m/s; $0,9$m/s.

7. Uma tina de água tem 10m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapezóide isósceles com 30cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2\text{m}^3/\text{min}$, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30cm de profundidade? Resp.: $\frac{10}{3}$cm/min.

8. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede (veja figura). Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 metros da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.



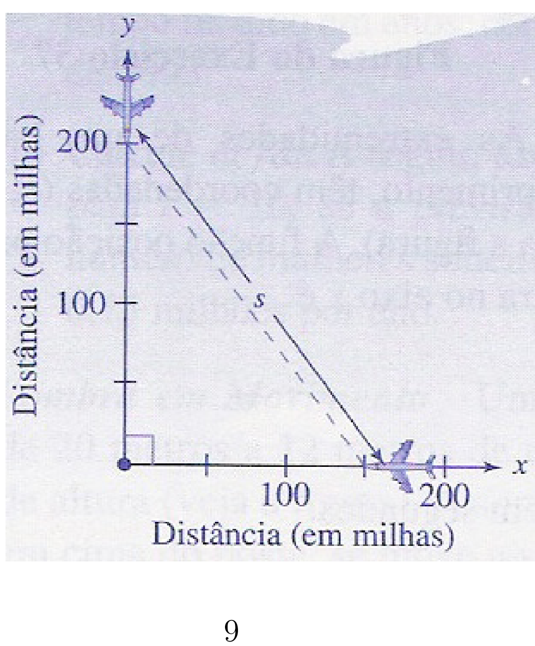
   (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

   (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

   (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

   Resp.: (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.

9. (*Controle de Tráfego Aéreo*) Um controlador de tráfego aéreo percebe que dois aviões, que estão voando na mesma altitude e ao longo de duas retas perpendiculares entre si, irão se chocar no ponto de intersecção destas retas (veja figura).



Num certo instante um dos aviões está a 150 milhas desse ponto e está se deslocando a uma velocidade de 450 milhas por hora. O outro avião está a 200 milhas do ponto e tem uma velocidade de 600 milhas por hora. A que taxa a distância entre os aviões está diminuindo nesse instante?
Resp: 750 mph.