1ª Lista de Exercícios – MAT0112 – Vetores e Geometria

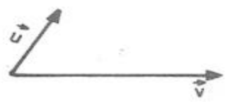
Adição de vetores

1. Prove que

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$

2. Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura, ache um representante de $\vec{x}$ tal que

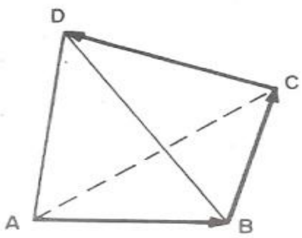
$\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$



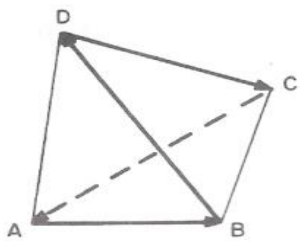
3. Justifique a seguinte regra. Para calcular $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, tome um representante (A, B) de $\vec{u}$, um representante (B, C) de $\vec{v}$, um representante (C, D) de $\vec{w}$. Então $\vec{x}$ tem como representante (A, D). (Intuitivamente falando, "fecha-se o polígono".) Raciocinando por indução finita, pode-se generalizar essa regra para *n* parcelas.

4. Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:

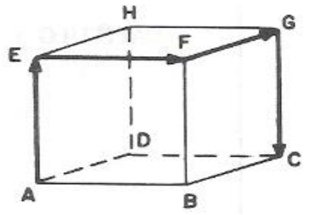
(a)



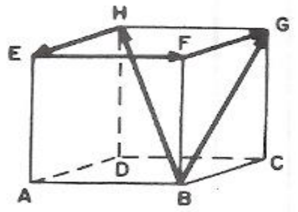
(b)



(c)

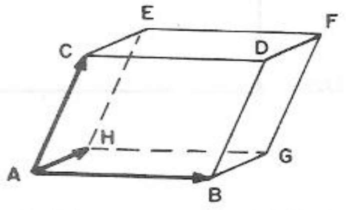


(d)



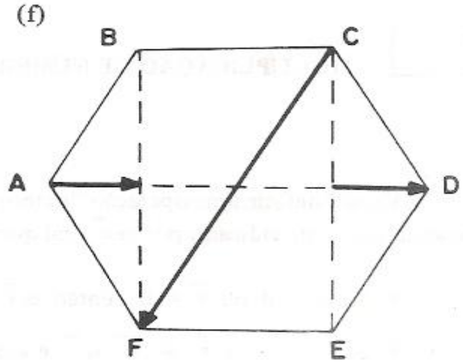
(CUBOS)

(e)



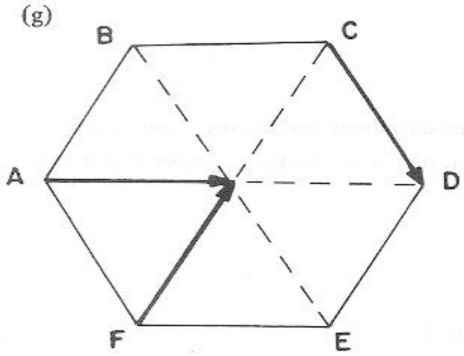
(PARALELEPÍPEDO)

(f)

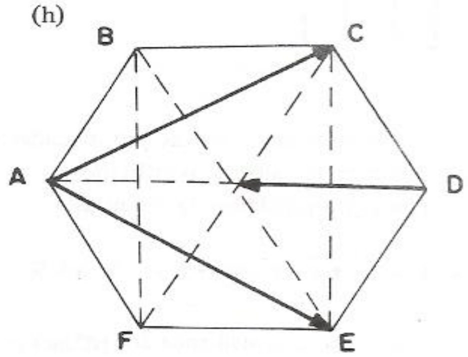


(HEXÁGONOS REGULARES)

(g)



(h)



Multiplicação de um número real por um vetor

1. Prove que $\alpha \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

2. Prove que se $\alpha \vec{u} = \alpha \vec{v}$ e se $\alpha \neq 0$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Prove que $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$.

4. Prove que $2\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$.

5. Se (A, B) é um representante de $\vec{u} \neq \vec{0}$, e (C, D) um representante de $\vec{v} \neq \vec{0}$, prove que:

   $AB \,//\, CD \iff$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

   (Este resultado é importantíssimo e será muito útil; trata-se de uma "tradução" algébrica muito simples, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, de um fato geométrico muito importante, o paralelismo. É exatamente isto que se pretende na Geometria Analítica.)

6. Resolva a equação na incógnita $\vec{x}$: $2\vec{x} - 3\vec{u} = 10(\vec{x} + \vec{v})$

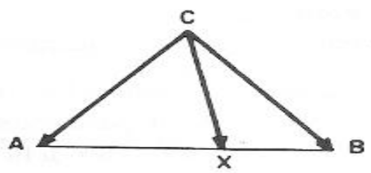
7. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

8. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado *versor* de $\vec{v}$).

Soma de ponto com vetor

1. Dados quatro pontos A, B, C e X tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m).



Sugestão. Na relação $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ faça aparecer C em ambos os membros.

2. É dado um triângulo ABC e os pontos X, Y, Z tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ $\overrightarrow{BY} = n\overrightarrow{YC}$ $\overrightarrow{CZ} = p\overrightarrow{ZA}$. Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ (e m, n, p).

3. Num triângulo ABC é dado X sobre AB tal que $\|\overrightarrow{AX}\| = 2\,\|\overrightarrow{XB}\|$ e é dado Y sobre BC tal que $\|\overrightarrow{BY}\| = 3\,\|\overrightarrow{YC}\|$. Mostre que as retas CX e AY se cortam.

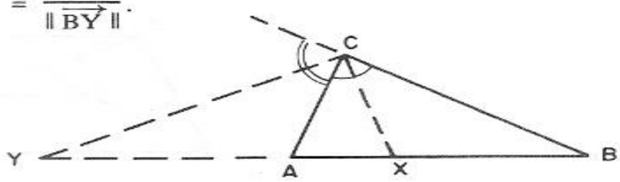
Sugestão: Use o exercício anterior, achando qual deve ser m e qual deve ser n. Suponha $\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{AY}$ e chegue a um absurdo.

4. Num triângulo ABC, sejam X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e, supondo $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$, Y a interseção da reta AB com uma das bissetrizes externas do ângulo $A\hat{C}B$(*).

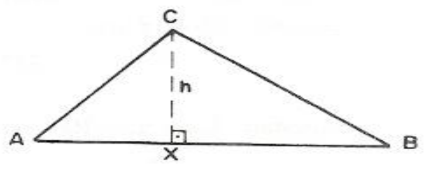
a) Os vetores $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} - \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ são respectivamente paralelos a $\overrightarrow{CX}$ e $\overrightarrow{CY}$. Dê uma explicação geométrica para isso. No Capítulo 8 (Exercício 3) você dará uma prova analítica.

b) Prove que $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$ e $\dfrac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AY}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BY}\|}$.

c) Exprima $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{CY}$, X e Y em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



5. Sendo CX a altura do $\triangle ABC$ relativa ao vértice C, exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
Sugestão. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são retos, vale $h = \|\overrightarrow{AX}\|\ \text{tg}\,\hat{A} = \|\overrightarrow{BX}\|\ \text{tg}\,\hat{B}$. Conclua daí que $(\text{tg}\,\hat{A})\,\overrightarrow{AX} = (\text{tg}\,\hat{B})\,\overrightarrow{XB}$, quer $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos, quer um deles seja obtuso.



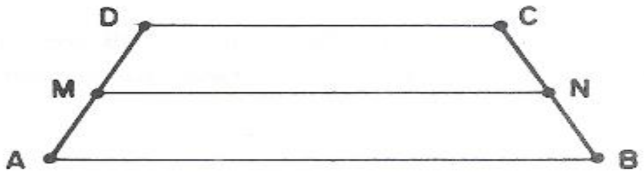
(*) Existe Y se $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$.

6. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, que divide cada uma na razão 2:1 a partir do vértice correspondente.

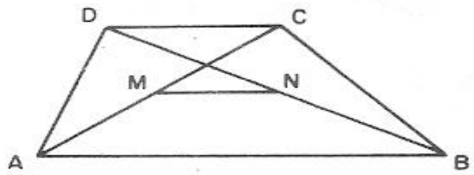
Sugestão: Usando o Exercício Resolvido nº 7: seja G o ponto comum às retas AN e BP, e H o ponto comum às retas AN e CM. Existem λ, μ, α e β tais que $G = A + \lambda \overrightarrow{AN} = B + \mu \overrightarrow{BP}$ e $H = C + \alpha \overrightarrow{CM} = A + \beta \overrightarrow{AN}$. Calcule λ, μ, α e β.

7. Prove que as alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Idem para as bissetrizes internas.

8. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



9. Demonstre que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a semi-diferença das medidas das bases. (Atenção: *não é suficiente* provar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



10. Num triângulo ABC, sejam M, N, P, os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Sugestão: Exercício Resolvido nº 2.

11. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

Sugestão: Tome um ponto O qualquer e considere os pontos $X = O + \overrightarrow{AN}$, $Y = X + \overrightarrow{BP}$ e $Z = Y + \overrightarrow{CM}$. Mostre que $Z = O$ e que O, X, Y não são colineares.

12. Sendo ABCDEF um hexágono regular de centro O, prove que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\,\overrightarrow{AO}.$$

13. Seja OABC um tetraedro, X o ponto da reta BC definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

14. Seja OABC um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC (baricentro). Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

15. Sejam A, B, C, D pontos quaisquer, M o ponto médio de AC e N o de BD. Exprima $\vec{x}$ em função de $\overrightarrow{MN}$, sendo $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

16. Seja ABCD um quadrilátero, e O um ponto qualquer. Seja P o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais AC e BD. Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

17. Dados O, A, B, C, ache G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ em função de O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

18. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que:

X é um ponto da reta AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha + \beta = 1$.

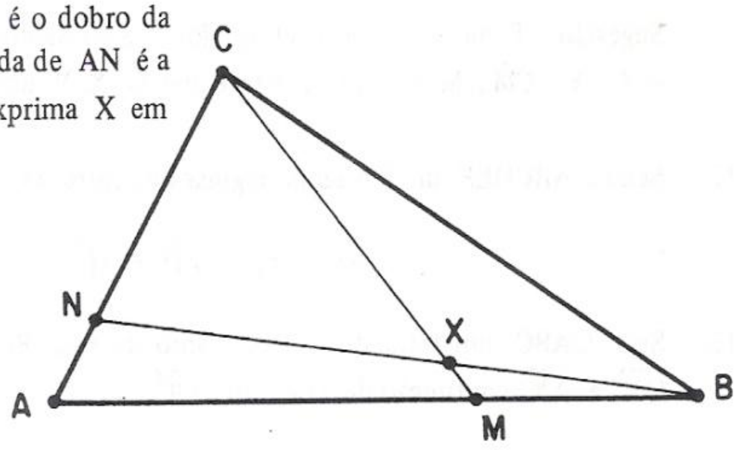
Sugestão: Exercício 1.

19. Nas condições do Exercício 18, prove que:

X é um ponto do segmento AB $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, e $\alpha + \beta = 1$.

20. Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Prove que: X é um ponto interior ao triângulo ABC se e somente se $\overrightarrow{CX} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, e $\alpha + \beta < 1$ (um ponto é interior a um triângulo se for interior a alguma ceviana dele).

21. Na figura, a distância de M a A é o dobro da distância de M a B, e a medida de AN é a terça parte da medida de CN. Exprima X em função de A, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



22. Considere o triângulo ABC, e sejam $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, e $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$. Calcule α real para que o ponto $X = C + \alpha\vec{w}$ pertença à reta AB.

Dependência e independência Linear

1. Prove que se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI, então $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v})$ também é LI, o mesmo sucedendo com $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$.

2. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. Dado $\vec{t}$ qualquer, sabemos que existem α, β, γ tais que $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (por quê?). Prove que $(\vec{u} + \vec{t}, \vec{v} + \vec{t}, \vec{w} + \vec{t})$ é LI $\iff \alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

3. Prove que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI $\iff$ $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ é LI. (A implicação $\Rightarrow$ foi provada no Exercício Resolvido nº 3.)

4. Demonstre a Proposição 2 no caso $n = 1$. Pergunta: por que a demonstração feita no texto não serve neste caso?

5. Prove que $(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w})$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Base

Todos os vetores estão referidos a uma mesma base

1. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$, $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, ache as coordenadas de

   a) $\vec{u} + \vec{v}$
   b) $\vec{u} - 2\vec{v}$
   c) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

2. Verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como no exercício anterior.

3. Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, estes vetores sendo dados no exercício 1.

4. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?

5. Ache m de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)$. Em seguida, determine m para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja LD.

6. Decida se são LI ou LD:

   a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$
   b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$
   c) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$
   d) $\vec{u} = (1, -3, 14)$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$
   e) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ $\vec{v} = (200, 2, 1)$, $\vec{w} = (300, 1, 2)$
   f) $\vec{u} = (1, 2, 1)$ $\vec{v} = (1, -1, -7)$, $\vec{w} = (4, 5, -4)$
   g) $\vec{u} = \vec{0}$
   h) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

7. Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base, e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e}_3$$

decida se $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base.

8. Ache m para que sejam LD

a) $\vec{u} = (m, 1, m)$, $\vec{v} = (1, m, 1)$
b) $\vec{u} = (1-m^2, 1-m, 0)$, $\vec{v} = (m, m, m)$
c) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$
d) $\vec{u} = (m, 1, m+1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$, $\vec{w} = 0, m, 2m)$

9. Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base, prove que $F = (\alpha\vec{e}_1, \beta\vec{e}_2, \gamma\vec{e}_3)$ é base, desde que α, β, γ não sejam nulos.

10. Seja OABC um tetraedro, e M o ponto médio de BC.

a) explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base.
b) determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

11. Calcule $\|\vec{u}\|$, sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base ortonormal, nos casos

a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (1, 1, 1)_E$
b) $\vec{u} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
c) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$
d) $\vec{u} = -4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$

Ângulo entre vetores. Produto escalar

Fixa-se uma base ortonormal.

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$

b) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$

c) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$

d) $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})$

e) $\vec{u} = (300, 300, 0)$, $\vec{v} = (-2000, -1000, 2000)$ (procure vetores com coordenadas mais simples tais que a medida do ângulo formado seja a mesma).

2. Ache x de modo que $\vec{u} \perp \vec{v}$ nos casos

a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$, $\vec{v} = (1, x, 3)$

b) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$

c) $\vec{u} = (x+1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x-1, -1, -2)$

d) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$

3. Sejam A, B e C três pontos de E^3, e sejam $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$ e $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$. Mostre que o vetor $\vec{u} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} + \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ é paralelo à bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Interprete este resultado, relacionando-o com uma conhecida propriedade dos losangos.

Sugestão: Calcule os co-senos dos ângulos entre $\vec{u}$ e $\vec{c}$ e entre $\vec{u}$ e $\vec{a}$, e compare-os.

4. Ache $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{w} = (2, -4, 6)$. Dos "$\vec{u}$" encontrados, qual o que forma ângulo agudo com o vetor $(1, 0, 0)$?

5. Ache $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$, e que satisfaz $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.

6. Ache $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1, -1)$, tal que $(\vec{u}, (1, 1, 1), (0, 1, -1))$ seja LD.

7. Ache $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, a medida em graus do ângulo entre $\vec{u}$ e $(1, -1, 0)$ seja 45, e $\vec{u} \perp (1, 1, 0)$.

8. Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{DA}$ sabendo que o tetraedro ABCD é regular, de aresta unitária.

9. Calcule $\| 2\vec{u} + 4\vec{v} \|^2$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, e a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{2\pi}{3}$.

10. Se A, B, C são vértices de um triângulo equilátero de lado unitário, calcule:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$$

11. Se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = \dfrac{3}{2}$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$, $\|\vec{w}\| = 2$, calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

12. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\dfrac{\pi}{4}$. Sabendo que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, e $\|\vec{v}\| = 1$, ache a medida em radianos do ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

13. Fixada uma base ortonormal $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, e tomado $\vec{v} \neq \vec{0}$, chamam-se *co-senos diretores de* $\vec{v}$ *relativamente à base fixada* os números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, onde α, β, γ, são as medidas dos ângulos que $\vec{v}$ forma, respectivamente, com $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

a) Sendo $\vec{v} = (x, y, z)$, prove que

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

b) Prove que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

c) Prove que os co-senos diretores de $\vec{v}$ são as coordenadas do versor de $\vec{v}$, isto é, de $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

d) Sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, de co-senos diretores $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ e $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, respectivamente, mostre que

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

e) Ache os co-senos diretores de $\vec{v} = (1, -3, \sqrt{6})$ e de $-\vec{v}$.

f) Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases ortonormais, mostre que a j-ésima coluna da matriz de mudança de E para F é formada pelos co-senos diretores de $\vec{f}_j$ em relação a E.

14. Ache a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do $\vec{v}$ nos casos

a) $\vec{w} = (1, -1, 2)$ $\quad\vec{v} = (3, -1, 1)$

b) $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ $\quad\vec{v} = (-2, 1, 2)$

c) $\vec{w} = (1, 3, 5)$ $\quad\vec{v} = (-3, 1, 0)$

15. Decomponha $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, com $\vec{w}_1$ paralelo ao vetor $(0, 1, 3)$ e $\vec{w}_2$ ortogonal a este último.

16. Decomponha $\vec{w} = (1, 0, 3)$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, com $\vec{w}_1$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 2)$ linearmente dependentes e $\vec{w}_2$ ortogonal a estes dois últimos.

17. (Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.) Dada a base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ ache uma base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que $\vec{e}_1 // \vec{f}_1$ e $\vec{e}_2$ seja combinação linear de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

Aplicação $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

Sugestão: $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$; use o Exercício Resolvido nº 7 para escrever diretamente $\vec{e}_2$; use o Exercício Resolvido nº 8 para escrever diretamente $\vec{e}_3$.

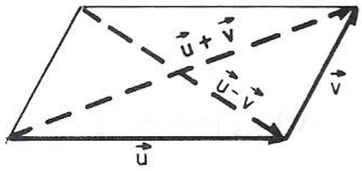
18. Prove que $(\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v}) \perp (\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v})$

19. Prove que se $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$ e $\vec{v} \perp (\vec{w} - \vec{u})$, então $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$.

20. Mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$; e que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

21. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm mesma medida se e somente se o paralelogramo é um retângulo.

Sugestão: Traduza para $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.



22. Mostre que as diagonais de um losango:

a) são perpendiculares e reciprocamente, se um paralelogramo tem as diagonais perpendiculares, ele é um losango;

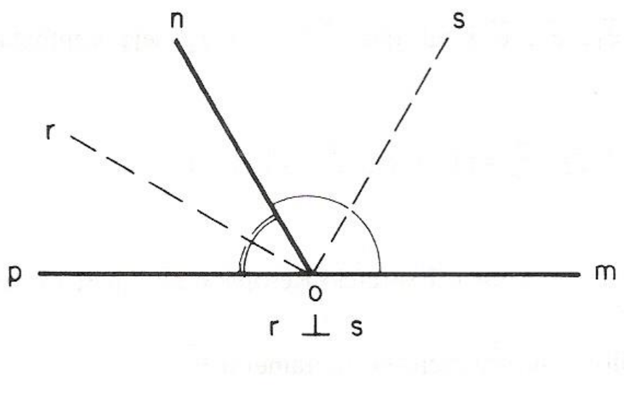
b) bissectam os ângulos internos.

23. a) Mostre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é perpendicular à base e é bissetriz do ângulo do vértice.

b) Mostre que se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes (isto é, têm a mesma medida).

c) (Recíproca de (b)) Mostre que se um triângulo tem dois ângulos congruentes, ele é isósceles.

24. Mostre que as bissetrizes de ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares.

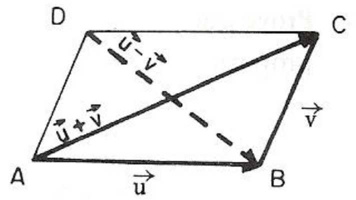


Sugestão: Exercício 3

25. Mostre que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

Sugestão: Mostre que

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$



26. Mostre que

a) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (propriedade triangular)

b) $|\,\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\,| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$

c) $|\vec{x}\cdot\vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ são lineares dependentes

Sugestão

a) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$. Use $\vec{x}\cdot\vec{y} \leqslant |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

(Desigualdade de Schwarz.)

b) A desigualdade equivale a

$-\|\vec{x}-\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$.

Escreva $\vec{x} = (\vec{x}-\vec{y}) + \vec{y}$. Use a parte a.

27. Sendo $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} = \dfrac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}\,\vec{u} + \dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}\,\vec{v}$, prove que $\vec{w}$ forma ângulos congruentes com $\vec{u}$ e com $\vec{v}$.

28. a) Prove a relação de Euler

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$

b) Prove que se um tetraedro tem dois pares de arestas opostas ortogonais, as duas arestas restantes são também ortogonais.

c) Prove que as alturas de um triângulo passam por um mesmo ponto (este exercício já foi proposto no Capítulo 4; usando a relação de Euler, sua resolução fica muito simplificada).

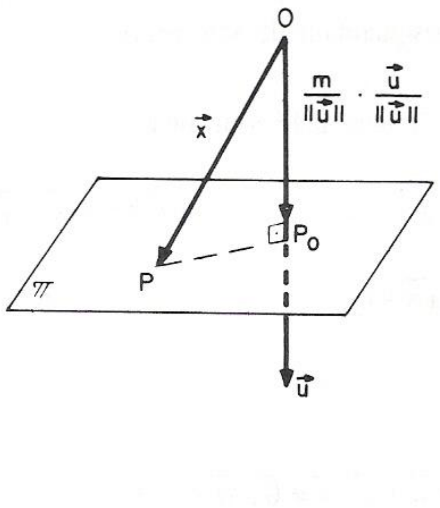
29. O objetivo deste exercício é resolver a equação

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = m \qquad (\vec{u} \neq \vec{0})^{(*)} \qquad (\alpha)$$

Vamos tentar visualizar geometricamente o conjunto-solução V da mesma. Como $\text{proj}_{\vec{u}}\, \vec{x} = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{u}}{\| u \|^2}\, \vec{u}$ (Exercício Resolvido nº 7), temos que V é o conjunto dos $\vec{x}$ cuja projeção sobre $\vec{u}$ é $\dfrac{m}{\| \vec{u} \|^2}\, \vec{u}$.

Esta observação já nos dá uma idéia de V.

Tomando $O \in E^3$, e sendo $P_0 = O + \dfrac{m}{\| \vec{u} \|} \dfrac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|}$, vemos que se P pertence ao plano π que contém P_o e é ortogonal a $\vec{u}$, então $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ é solução, pois a projeção de $\vec{x}$ na direção de $\vec{u}$ é $\dfrac{m}{\| \vec{u} \|^2}\, \vec{u}$ e é fácil se convencer que todo $\vec{x}$ solução de (α) se obtém assim.



Então

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_oP} + \overrightarrow{OP_o} = \overrightarrow{P_oP} + \frac{m}{\| \vec{u} \|} \frac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|}$$

(*) Caso $\vec{u} = \vec{0}$, a equação não tem solução se $m \neq 0$, e qualquer $x \in V^3$ é solução se $m = 0$.

Tomando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores linearmente independentes e paralelos a π, podemos escrever

$\overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, logo
$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \frac{m}{\|u\|^2} \vec{u} \qquad (\gamma)$$

Quando λ e μ percorrem $\mathbb{R}$, $\vec{x}$ percorre V, o conjunto solução de (α).

Para justificar rigorosamente as afirmações, indicamos os passos seguintes, deixados como exercício.

Considere a equação homogênea

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \qquad (\vec{u} \neq \vec{0}) \qquad (\beta)$$

Vamos fixar uma solução particular de (α), que denotaremos por $\vec{x}_o$.

a) Mostre que o conjunto-solução de (β) é o conjunto dos vetores da forma $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, onde λ e μ percorrem $\mathbb{R}$, e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores fixados, linearmente independentes e ortogonais a $\vec{u}$.

b) Mostre que se $\vec{x}$ é solução de (α) então $\vec{x} - \vec{x}_o$ é solução de (β) (isto é, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x} = \vec{x}_o + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$) e que todo $\vec{x}$ dessa forma é solução de (α).

c) Mostre que $\vec{x}_o = \dfrac{m \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ é solução de (α).

d) Conclusão: de (a), (b), (c) concluímos que o conjunto-solução de (α) é formado pelos $\vec{x}$ dados por (γ), onde λ e μ percorrem $\mathbb{R}$.

30. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{u} \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = m \end{cases} \qquad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

31. Mostre que se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ são bases ortonormais, então a matriz M de mudança de base de E para F satisfaz $M \cdot M^t = M^t \cdot M = I$, onde I é a matriz identidade (matrizes com tal propriedade chamam-se matrizes ortogonais).