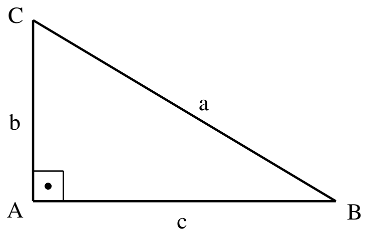
Introdução à trigonometria
Prof. Jorge T. Hiratuka

Observação: O nosso estudo se restrigirá aos triângulos retângulos



$\hat{A} = 90^o$
$\hat{B} + \hat{C} = 90^o$
$a^2 = b^2 + c^2$

$a =$ hipotenusa
$b =$ cateto
$c =$ cateto

SENO

$$\boxed{\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hiponetusa}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hiponetusa}}}$$

COSSENO

$$\boxed{\cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{hiponetusa}}}$$

$$\boxed{\cos \hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hiponetusa}}}$$

TANGENTE

$$\boxed{\text{tg}\, \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}}$$

$$\boxed{\text{tg}\, \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}}$$

Pelas definições acima fica claro que:

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \cos\hat{C}$$
$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \text{sen}\hat{C}.$$

Ou seja,

$$\boxed{\cos(\alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha)}$$
$$\boxed{\text{sen}(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)}$$

Da equação $a^2 = b^2 + c^2$, tem-se que:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Podemos ainda deduzir das definições que:

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$
$$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}}.$$

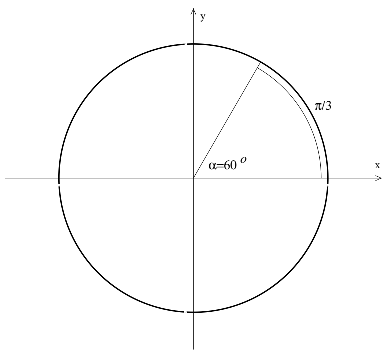
Ou seja,

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Arcos e ângulos

Os conceitos de seno, cosseno e tangente são definidos sobre os ângulos agudos de um triângulo retângulo, mas podemos generalizá-los para um ângulo qualquer.

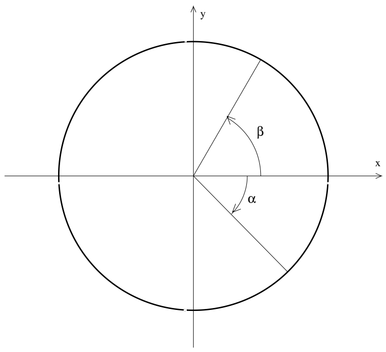
Podemos associar a medida de um ângulo ao comprimento do arco correspondente em um círculo unitário (ou seja, de lado 1) como segue:



No total, a circunferência tem 360^o e o comprimento do seu arco é de 2π radianos. Se α mede 60^o, sabemos que 60^o é $\frac{1}{6}$ de 360^o. A esse ângulo α associamos o valor $\frac{1}{6}.2\pi$, ou seja $\frac{\pi}{3}$, e assim sucessivamente.

Contamos o ângulo a partir do eixo Ox e caminhamos no sentido anti-horário. Portanto, se caminharmos no sentido horário teremos um ângulo negativo.

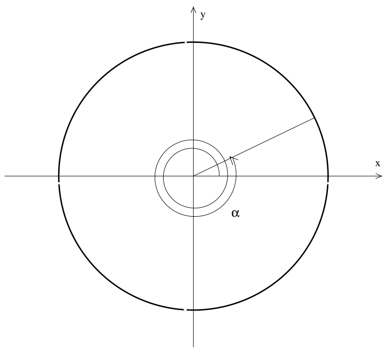
Exemplos:



$\alpha = -45^o$
$\beta = +70^o$

Se o ângulo exceder a 360^o (quando damos mais de uma volta no sentido anti-horário), subtraímos 360^o deste valor, quantas vezes necessário, até obtermos um valor entre 0^o e 360^o.

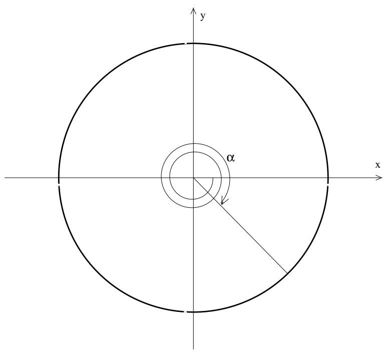
Exemplos:



$\alpha = 750^o$
O ângulo correspondente a α será:
$750^o - 360^o - 360^o = 30^o$
Então $\alpha = 30^o$.

Se o ângulo for negativo (quando caminhamos no sentido horário), somamos 360^o, quantas vezes necessário, até obtermos um valor entre 0^o e 360^o.

Exemplos:



$\alpha = -770^o$
O ângulo correspondente a α será:
$-770^o + 360^o + 360^o + 360^o = 310^o$
Então $\alpha = 310^o$.

Transformar ângulos em arcos

Basta aplicar uma regra de três simples.

Exemplos: Se 360^o corresponde a 2π. Quanto corresponde a 80^o?

$$\begin{array}{ccc} 360^o & - & 2\pi \\ 80^o & - & x \end{array}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{360^o}{80^o} &= \frac{2\pi}{x} \\ 360^o x &= 2\pi.80^o \\ x &= \frac{8\pi}{18} \\ x &= \frac{4\pi}{9} \end{aligned}$$

Portanto, 80^o corresponde a $\frac{4\pi}{9}$ radianos.

Observação: No nosso curso utilizaremos apenas ãngulos medidos em radianos, salvo menção em contrário.

Redução ao 1^o quadrante

SENO

$$\begin{aligned} \text{sen}x &= \text{sen}(\pi - x) \\ \text{sen}x &= -\text{sen}(x - \pi) \\ \text{sen}x &= -\text{sen}(2\pi - x) \\ \text{sen}x &= -\text{sen}(-x) \end{aligned}$$

COSSENO

$$\begin{aligned} \cos x &= -\cos(\pi - x) \\ \cos x &= -\cos(x - \pi) \\ \cos x &= -\cos(2\pi - x) \\ \cos x &= \cos(-x) \end{aligned}$$

TANGENTE

$$\begin{aligned} \text{tg}\, x &= -\text{tg}\,(\pi - x) \\ \text{tg}\, x &= \text{tg}\,(x - \pi) \\ \text{tg}\, x &= -\text{tg}\,(2\pi - x) \\ \text{tg}\, x &= -\text{tg}\,(-x) \end{aligned}$$

Relação entre seno e cosseno (arcos complementares)

$$\cos x = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \qquad \text{e} \qquad \text{sen}x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

Exemplos:

- $\cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\frac{2\pi}{3} \quad (\text{pois } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi)$
- $\text{sen}\pi = \cos 0 \quad (\text{pois } \pi + 0 = \pi)$
- $\cos\frac{\pi}{6} = \text{sen}\frac{5\pi}{6} \quad (\text{pois } \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi)$

Razões inversas das funções trigonométricas

Observação: As razões inversas NÃO são as funções inversas das funções trigonométricas.

SECANTE

Definição: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

COSSECANTE

Definição: $\text{cossec}(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)}$

COTANGENTE

Definição: $\text{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$

Fórmulas decorrentes

- $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x \quad \text{e} \quad 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$

Fórmulas de adição

- $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \text{sen}a.\text{sen}b$
- $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \text{sen}a.\text{sen}b$
- $\text{sen}(a - b) = \text{sen}a.\cos b - \text{sen}b.\cos a$
- $\text{sen}(a + b) = \text{sen}a.\cos b + \text{sen}b.\cos a$
- $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$
- $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$

Fórmulas de duplicação

- $\text{sen}2a = 2.\text{sen}a.\cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
- $\text{tg}\, 2a = \dfrac{2.\text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}$

Fórmulas de transformação em produto

- $\cos a + \cos b = 2.\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\cos a - \cos b = -2.\text{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\text{sen}a + \text{sen}b = 2.\text{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\text{sen}a - \text{sen}b = 2.\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Observação: Sejam a, b, c de acordo com a figura abaixo, então existe um número real $r > 0$ tal que se $0 < \alpha < r$, então $a < b < c$, ou seja, $\text{sen}\alpha < \alpha < \text{tg}\,\alpha$.