<u>Conjunto dos Números Reais</u>

Prof. Jorge T. Hiratuka

I - conjunto dos números naturais

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

II - conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

III - conjunto dos números racionais

$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$

Operações com os números racionais: dados dois números racionais $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{m}{n}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn}$$

<u>Observação</u>: Todo número racional quando escrito na forma decimal apresenta uma dízima periódica.

<u>Exemplos</u>: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,333...$; $-\frac{978}{990} = -\frac{163}{165} = -0,9878787...$

<u>Observação</u>: Existem números na forma decimal, com infinitos dígitos, que não apresentam dízima periódica, esses números são chamados de irracionais.

<u>Exemplos</u>: $\sqrt{2}$, $\sqrt{p}$ com p primo, $\pi = 3,14159265359...$ e $e = 2.71828182846...$

<u>Exercício</u>: Mostre que $\sqrt{2}$ não é racional.

IV - conjunto dos números reais

Chamamos de conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a união dos números racionais e irracionais.

<u>Observação</u>: O conjunto dos números reais deve ser construído formalmente, mas não faz parte deste curso.

<u>Propriedades</u>: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, a adição e multiplicação dos números reais satisfazem:

- A1: $x + y = y + x$ (comutativa)
- A2: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativa)

- A3: $x + 0 = 0 + x = x$ (elemento neutro)
- A4: dado x, existe y tal que $x + y = y + x = 0$ (elemento oposto)
  Notação $y = -x$
- M1: $x.y = y.x$ (comutativa)
- M2: $x.(y.z) = (x.y).z$ (associativa)
- M3: $x.1 = 1.x = x$ (elemento neutro)
- M4: dado $x \neq 0$, existe y tal que $x.y = y.x = 1$ (elemento inverso)
  Notação $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$
- D: $x.(y + z) = x.y + x.z$ (distributiva)

Observação: $0^{-1} = \frac{1}{0}$ **não** está definida.

Desigualdades

Dados dois números reais x, y, dizemos que:

- x é maior que y, ou seja $x > y$, se $x - y > 0$
- x é menor que y, ou seja $x < y$, se $x - y < 0$
- x é maior ou igual a y, ou seja $x \geq y$, se $x - y \geq 0$
- x é menor ou igual a y, ou seja $x \leq y$, se $x - y \leq 0$

Exemplos: $2 < 3, \quad 5 \geq 3, \quad 4 \leq 4$

Propriedades: Sejam a, b, c, d números reais:

- Se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$
- Se $x > y$ e $z > 0$, então $xz > yz$
- Se $x > y$ e $z < 0$, então $xz < yz$
- $x \leq x$
- Se $x \leq y$ e $x \geq y$, então $x = y$
- Se $x < y$, então $x + z < y + z$
- Se $x \leq y$ e $z \leq w$, então $x + z \leq y + w$
- Se $0 \leq x < y$ e $0 \leq z < w$, então $xz < yw$
- Se $x > 0$, então $x^{-1} > 0$

- Se $x > 0$, então $-x < 0$
- Se $0 < x < y$, então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
- $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$ (tricotomia)
- Se $x + z = y + z$, então $x = y$ (lei do cancelamento)
- Se $x.y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$

Módulo de um número real

Seja x um número real, definimos o módulo (ou valar absoluto) de um número real de x por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos: $|5| = 5, \quad |-3| = 3$

Propriedades: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, então:

- $|x^2| = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$, (obs.: $(\sqrt{x})^2 = x$, com $x \geq 0$)
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)
- Se $a > 0$ e $|x| = a$, então $x = a$ ou $x = -a$
- Se $r > 0$ e $|x| < r$, então $-r < x < r$
- Se $r > 0$ e $|x| > r$, então $x > r$ ou $x < -r$

Exercício: Sejam $r, p \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, determine o conjunto solução de $|x - p| < r$, ou seja, determine o conjunto dos números x que satisfazem a inequação dada.

Intervalos

Definição: $+\infty =$ "mais infinito"
$-\infty =$ "menos infinito"

Observação: ∞ é apenas um símbolo, ou seja, não é um número de não deve ser tratado como tal.

Definição: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

Notação:

- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Observação: Dados 3 números $x, a, r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$, então:

$$x \in]a - r, a + r[\Leftrightarrow |x - a| < r$$

Potência de um número real

Definição: Sejam $a > 0$ um número e $r = \dfrac{m}{n}, > o$, um número racional. Definimos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo: a) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ b) $5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$

Propriedades: Sejam $a > 0$ e $b > 0$ dois números reais quaisquer e r, s dois racionais quaisquer, então valem:

1. $a^r.a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{rs}$
3. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

4. $(ab)^r = a^r b^r$
5. Se $a > 1$ e $r < s$, então $a^r < a^s$
6. Se $0 < a < 1$ e $r < s$, então $a^r > a^s$

Resumo dos livros: Cálculo - Volume 1 - Serge Lang e Um curso de cálculo - Volume 1 - Hamilton L. Guidorizzi