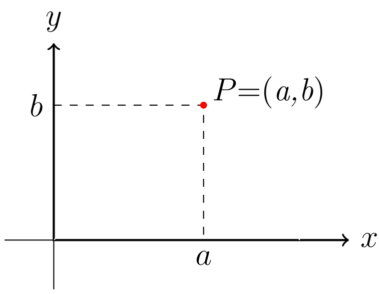
<u>**Pontos e Vetores**</u>
Prof. Jorge T. Hiratuka

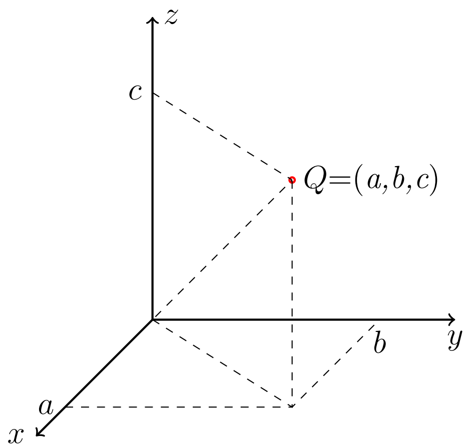
<u>**Ponto no espaço $\mathbb{R}^n$**</u>

<u>**Observação**</u>: Nesta seção vamos considerar os espaços $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Um par de números (a, b) pode ser utilizado para representar um ponto P no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. O números a e b são chamados de coordenadas de $P = (a, b)$.



E uma terna ordenada de números (a, b, c) pode ser utilizada para representar um ponto Q no espaço $\mathbb{R}^3$. O números a, b e c são chamados de coordenadas de $Q = (a, b, c)$.



<u>**Definição**</u>: Sejam $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dois pontos, Então definimos a *adição* da seguinte forma:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

<u>**Exemplo**</u>: Se $A = (1, 2)$ e $B = (-3, 5)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$, então $A + B = (-2, 7)$.

<u>**Exemplo**</u>: Se $A = (-1, \pi, 3)$ e $B = (\sqrt{2}, 7, -2)$ são pontos do espaço $\mathbb{R}^3$, então $A + B = (\sqrt{2} - 1, \pi + 7, 1)$.

Definição: Se α é um número real qualquer, então definimos αA como sendo

$$\alpha A = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

Exemplo: Se $A = (2, -1, 5)$ e $\alpha = 7$, então $\alpha A = (14, -7, 35)$.

Propriedades: Sejam A, B, C três pontos e α, β números reais, então valem:

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$

b) $A + B = B + A$

c) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

d) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

e) Se $O = (0, 0, \dots, 0)$, então $O + A = A + O = A$

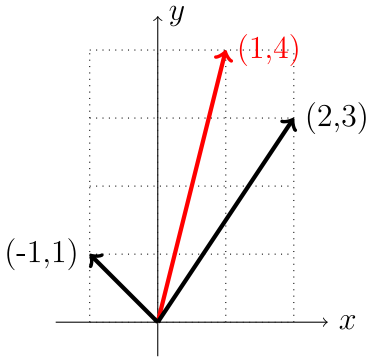
f) $1.A = A$

g) Se $-A$ é o ponto $(-1)A$, então $A + (-A) = O$

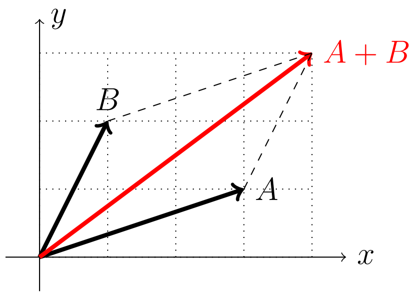
Observação: Denotamos $A + (-B)$ simplesmente por $A - B$.

Representação geométrica

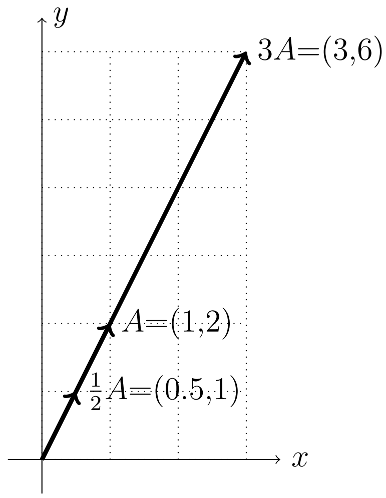
Exemplo: Sejam $A = (2, 3)$, $B = (-1, 1)$, então $A + B = (1, 4)$ está representado na figura abaixo:



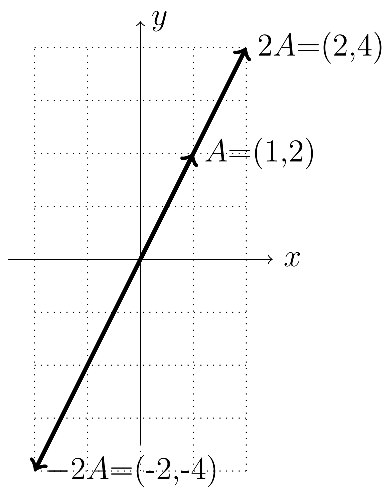
Exemplo: Sejam $A = (3, 1)$ e B=(1,2), então $A + B = (4, 3)$ está representado na figura abaixo:



Exemplo: Sejam $A = (1, 2)$, $\alpha = 3$ e $\beta = \frac{1}{2}$, então $\alpha A = (3, 6)$ e $\beta A = (\frac{1}{2}, 1)$ estão representados na figura abaixo:



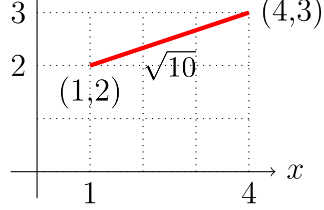
Exemplo: Sejam $A = (1, 2)$, então $2A$ e o seu oposto $-2A$ estão representados na figura abaixo:



Definição: Dados os pontos $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, a distância entre A e B é dado por

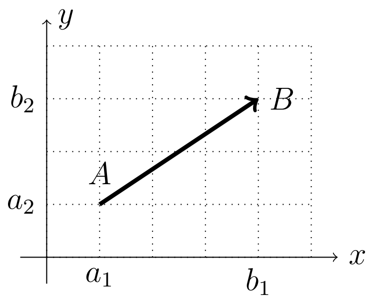
$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots (b_n - a_n)^2}.$$

Exemplo: Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (4, 3)$, então a distância entre A e B é $d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$.



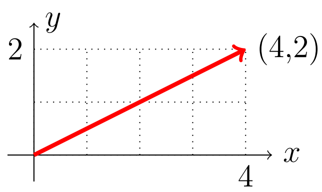
Vetores

Definição: Definimos vetor como sendo um par de pontos que escrevemos $\overrightarrow{AB}$ ou simplesmente $\vec{u}$. Visualizamos isto como uma seta entre A e B. Chamamos A de *ponto inicial* (ou *origem*) e B de *ponto final* (ou *extremo*) do vetor $\overrightarrow{AB}$.

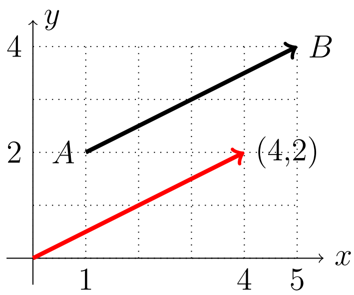


Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, as coordenadas do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ são dadas por $(b_1 - a_1, b_2 - b_2)$.

Exemplo: Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (5, 4)$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são $(5-1, 4-2) = (4, 2)$. Para a sua representação gráfica desenhe uma seta com origem no ponto $(0, 0)$ e a extremidade no ponto $(4, 2)$, como na figura abaixo:



Em seguida, considere uma cópia deste vetor (mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento) com origem no ponto A e extremidade no ponto B como abaixo:



Definição: Se todas as coordenadas do vetor forem o número 0, então o chamamos de *vetor nulo* e denotamos por $\overrightarrow{0}$.

Definição: Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ não nulos dizemos que eles:

a) são *paralelos* se existir um número real $\alpha \neq 0$, tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{PQ}$

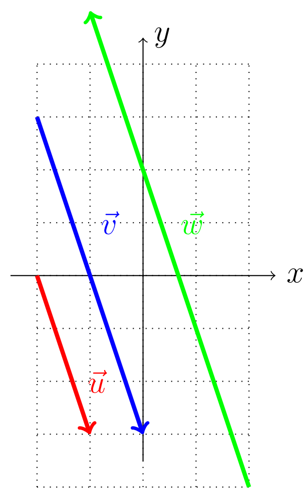
b) têm o *mesmo sentido* se existir um número real $\alpha > 0$, tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{PQ}$

c) têm *sentidos opostos* se existir um número real $\alpha < 0$, tal que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{PQ}$

Exemplo: Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1, -3)$, $\overrightarrow{v} = (2, -6)$ e $\overrightarrow{w} = (-3, 9)$, então:

a) $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos e têm o mesmo sentido, pois $\overrightarrow{v} = 2.\overrightarrow{u}$

b) $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos e têm sentidos opostos, pois $\overrightarrow{w} = -3.\overrightarrow{u}$



Observação: O vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor $\vec{u}$.

Produto Escalar

Definição: Dados dois vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, definimos o *produto escalar* $\vec{u}.\vec{v}$ por:

$$\vec{u}.\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Exemplo: Se $\vec{u} = (1, 3, -2)$ e $\vec{v} = (-1, 4, -3)$, então $\vec{u}.\vec{v} = -1 + 12 + 6 = 17$.

Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores e α um número real, então valem:

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

c) $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

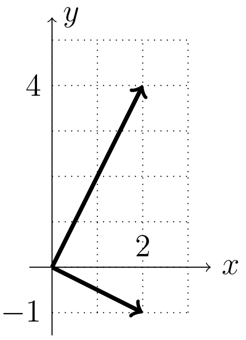
d) Se $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}.\vec{u} = 0$, caso contrário, $\vec{u}.\vec{u} > 0$

Observação: Mesmo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sejam vetores nulos, o produto escalar entre eles pode ser 0.

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 1, -\frac{4}{3})$, então $\vec{u}.\vec{v} = 2 + 2 - 4 = 0$.

Definição: Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *ortogonais* (ou *perpendiculares*) se $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exemplo: Dados dois vetores $\vec{u} = (2, -1)$ e $\vec{v} = (2, 4)$, temos que $\vec{u}.\vec{v} = 4 - 4 = 0$ e a representação geométrica é dada na figura abaixo:



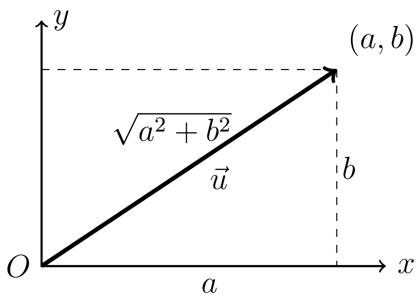
Observação: O vetor nulo $\vec{0}$ é ortogonal a qualquer outro vetor $\vec{u}$.

Norma de um vetor

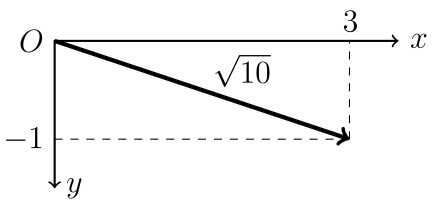
Definição: Considere o vetor $\vec{u}$, definimos a *norma* (ou *comprimento*) do vetor $\vec{u}$ como sendo $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$. (ou seja $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$)

Observação: Em coordenadas temos o seguinte, se $\vec{u} = (a, b)$, então

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(a, b).(a, b)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Exemplo: Seja $\vec{u} = (3, -1)$, então a norma de $\vec{u}$ é dada por $||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

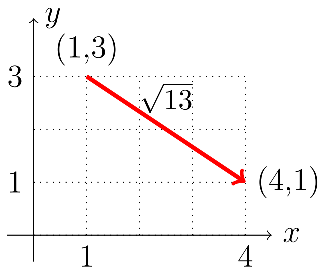


Observação: Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, então temos que a norma do vetor $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ é exatamente a distância entre os pontos A e B.

De fato, $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = d(A, B)$.

Exemplo: Sejam $A = (1, 3)$ e $B = (4, 1)$, então a norma do vetor $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$ e a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ é dada por:

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-3)^2} = d(A, B)$$



Teorema 1: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores, então $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq (\vec{u}.\vec{u})(\vec{v}.\vec{v})$.

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (5, 2)$ e $\vec{v} = (1, 3)$, temos que

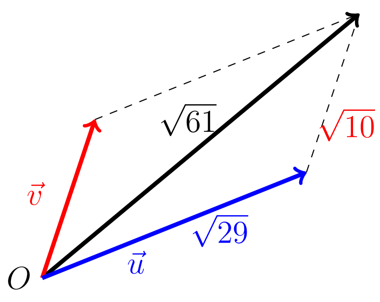
$$\vec{u}.\vec{v} = 5.1 + 2.3 = 11, \; \vec{u}.\vec{u} = 5^2 + 2^2 = 29 \text{ e } \vec{v}.\vec{v} = 1^2 + 3^2 = 10.$$

Portanto,

$$11^2 \leq 29.10, \text{ ou seja, } 121 \leq 290.$$

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (5, 2)$ e $\vec{v} = (1, 3)$, temos que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}, \; ||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ e } ||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}.$$



Observação: $\sqrt{29} \approx 5,38$, $\sqrt{10} \approx 3,16$ e $\sqrt{61} \approx 7,81$.

Teorema 2: Sejam $\vec{u}$ um vetor e α um número real, então $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha|.||\vec{u}||$.

Exemplo: Sejam $\vec{u} = (5, 3)$ e $\alpha = -2$, temos que

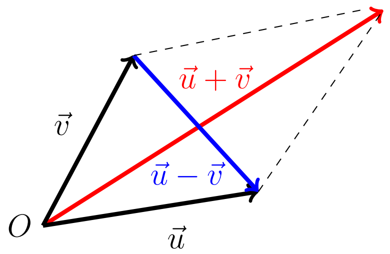
$$||\alpha\vec{u}|| = ||(-2).(5, 3)|| = |-2|.||(5, 3)|| = 2.||(5, 3)|| = 2\sqrt{5^2 + 3^2} = 2\sqrt{34}.$$

Definição: Dizemos que um vetor $\vec{u}$ é *unitário* se $||\vec{u}|| = 1$.

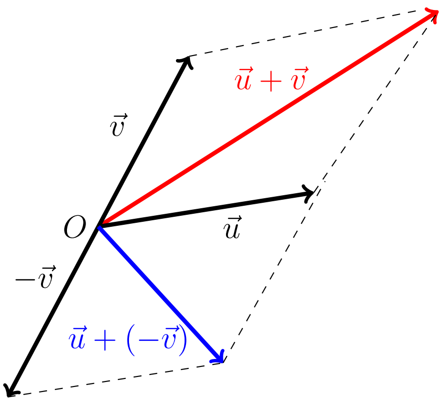
Exemplo: O vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ é unitário, pois $||\vec{u}|| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$.

Soma e diferença de vetores

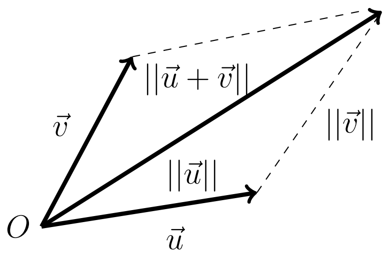
Observação: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores. A soma $\vec{u}+\vec{v}$ e a diferença $\vec{u}-\vec{v}$ são as diagonais do paralelogramo de lados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura abaixo



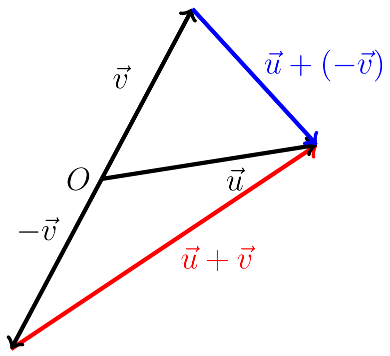
Podemos considerar outro representants do vetor $\vec{u}-\vec{v}$ para ver que a soma de vetores é sempre a diagonal principal do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ou $\vec{u}$ e $-\vec{v}$.



Teorema 3: Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ dois vetores, então $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}||+||\vec{v}||$ (desigualdade triangular).



Observação: O que acontece se $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$?



Usando a definição de norma, temos que:

$$\sqrt{(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})}$$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$$

$$\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$

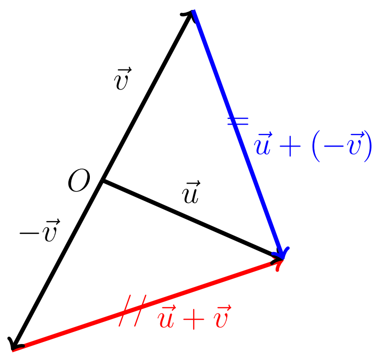
$$\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u} = -\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}$$

$$2\vec{u}.\vec{v}+2\vec{v}.\vec{u} = 0$$

$$4\vec{u}.\vec{v} = 0$$

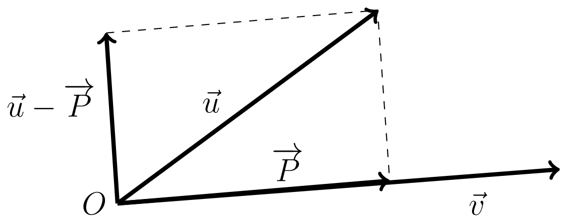
$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$

Portanto, se $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$, então $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ser ortogonais conforme a figura abaixo:



Projeção ortogonal

Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores com $\vec{v} \neq \vec{0}$. Desejamos definir a projeção de $\vec{u}$ ao longo do vetor $\vec{v}$, a qual será um vetor $\overrightarrow{P}$ como na figura abaixo.



Procuramos um vetor $\overrightarrow{P}$ tal que $\vec{u} - \overrightarrow{P}$ seja ortogonal à $\vec{v}$, e tal que $\overrightarrow{P}$ possa ser escrito na forma $\overrightarrow{P} = \alpha\vec{v}$, para algum número α. Como $\vec{u} - \overrightarrow{P}$ é ortogonal à $\vec{v}$, ou seja $(\vec{u} - \overrightarrow{P}).\vec{v} = 0$, temos que $(\vec{u} - \alpha\vec{v}).\vec{v} = 0$, com isso temos:

$$\vec{u}.\vec{v} - \alpha\vec{v}.\vec{v} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{v} - \alpha||\vec{v}||^2 = 0$$

$$\alpha||\vec{v}||^2 = \vec{u}.\vec{v}$$

$$\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}$$

portanto, concluímos que $\overrightarrow{P} = \alpha\vec{v} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$

Observação: Se $\vec{v}$ for um vetor unitário, ou seja $||\vec{v}|| = 1$, então $\alpha = \vec{u}.\vec{v}$.