Equação de Renovação

Seja $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ e considere a equação

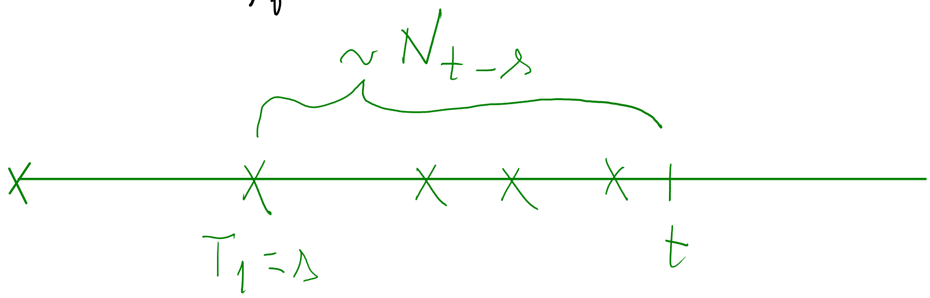
$$H = h + H*F \qquad (1)$$

$$H(t) = h(t) + \underbrace{\int_0^t H(t-s)\,dF(s)}_{=:\,H*F(t)}.$$

Ex:

$$U(t) = \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(\cancelto{1}{N_t}\,;\, T_1 > t) + \mathbb{E}(N_t\,;\, T_1 \leq t)$$

$$= \bar{F}(t) + \int_0^t \{1 + \mathbb{E}(N_{t-s})\}\, dF(s)$$



$$= 1 + \int_0^t U(t-s)\, dF(s) = 1 + U*F(t),$$

e U é solução da eq. de renovação com $h \equiv 1$.

Outros exs adiante; vide tb. Durrett

Teorema 1: Se h for limitada, então

$$H(t) = \int_0^t h(t-s)\, dU(s) \qquad (2)$$

é a única solução da eq. de renovação (1) que é limitada em intervalos limitados.

Dem. Para $n \geq 0$, seja

$$U_n(t) = E \sum_{k=0}^{n} 1\{S_k \leq t\} = \sum_{k=0}^{n} P(S_k \leq t).$$

Então $U_n(t) \nearrow_{n\uparrow\infty} U(t) \; (<\infty) \;\; \forall\, t \geq 0$

$$\therefore \; U(t) - U_n(t) \underset{n\uparrow\infty}{\searrow} 0 \quad \forall\, t \geq 0. \qquad (3)$$

Seja $H_n(t) = \int_0^t h(t-s)\, dU_n(s)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^t h(t-s)\, d\underbrace{F_{S_k}(s)}_{\text{fç de distr. de } S_k}$$

Então

$$H_{n+1}(t) = \overbrace{\int_0^t h(t-s)\, dF_{S_0}(s)}^{h(t)} + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t h(t-s)\, dF_{S_k}(t)$$

$$= h(t) + \sum_{k=1}^{n+1} h * F_{S_k}(t)$$

$$k \geq 1: \quad F_{S_k}(t) = F_{S_{k-1}+T}(t) = F_{S_{k-1}} * F(t)$$

$$\therefore \quad h * F_{S_k} = h * F_{S_{k-1}} * F$$

$$\overset{(i)}{=} h(t) + \sum_{k=1}^{n+1} h * F_{S_{k-1}} * F$$

$$\overset{(ii)}{=} h(t) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} h * F_{S_{k-1}} \right) * F$$

$$= h(t) + \Big(\overbrace{\sum_{k=0}^{n} h * F_{S_k}}^{H_n} \Big) * F$$

$$= h(t) + H_n * F$$

$$\therefore \quad H_{n+1} = h + H_n * F$$

(i) e (ii): vide ppdades 1) e 2) abaixo

Propriedades da convolução

1) Sejam F e G duas fç's de dist. (de probabilidade) em $[0,\infty)$ e $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ limitada. Então

$$h*(F*G) = (h*F)*G \quad (\text{comutatividade}).$$

Dem

$$h*(F*G)(t) = \int_0^t h(t-s)\,d(F*G)(s) = \mathbb{E}\{h(t-X-Y)\},$$

onde X e Y são v.a.'s indep. c/ fçs de dist. F e G, resp., e $h(r)=0$ se $r<0$.

$$= \mathbb{E}\Big\{\underbrace{\mathbb{E}\big(h(t-X-Y)\,\big|\,Y\big)}_{\underbrace{\mathbb{E}\{h(t-y-X)\}}_{h*F(t-y)\,=:\,h'(t-y)}\big|_{y=Y}}\Big\}$$

$$= \mathbb{E}\big(h'(t-Y)\big) = h'*G(t) = (h*F)*G \quad \square_1$$

2) $h*(F+G) = h*F + h*G$ (claro)

Agora,

$$H(t) - H_n(t) = \int_0^t h(t-s)\, dV_n(s),$$

onde $V_n(t) = U(t) - U_n(t) \nearrow t$

$\searrow n$

$\sup_{r \geq 0} |h(r)|$

$$\therefore |H(t) - H_n(t)| \leq \|h\|_\infty V_n(t) \xrightarrow[n \nearrow \infty]{} 0$$

uniformemente em intervalos limitados

Similarmente

$$|H * F(t) - H_n * F(t)|$$

$$= E\{|H(t-T) - H_n(t-T)|\, ; T \leq t\}$$

$$\leq \sup_{0 \leq s \leq t} |H(s) - H_n(s)| \leq \|h\|_\infty V_n(t) \xrightarrow[n \nearrow \infty]{} 0$$

$$\therefore \quad H(t) - \{h(t) + H * F\}$$

$$= H_{n+1}(t) - \{h(t) + H_n * F(t)\}$$

$$+ \; H(t) - H_{n+1}(t)$$

$$- \; H * F(t) + H_n * F(t)$$

$$\therefore \quad |H(t) - \{h(t) + H * F\}|$$

$$\leq |H(t) - H_{n+1}(t)| + |H * F(t) - H_n * F(t)|$$

$$\leq 2\|h\|_\infty V_n(t), \quad \forall n \geq 0$$

$$\therefore \leq \lim_{n\to\infty} 2\|h\|_\infty V_n(t) = 0$$

$\therefore$ H é solução de (1) ←

Claramente,

$$|H(t)| = \left| \int_0^t h(t-s)\, dU(s) \right|$$

$$\leq \int_0^t |h(t-s)|\, dU(s)$$

$$\leq \|h\|_\infty U(t)$$

$\therefore$ H é limitada em intervalos limitados:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| \leq \|h\|_\infty \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq T} U(t)}_{= U(T)}$$

Unicidade

Dadas 2 soluções de (1), H_1 e H_2, limitadas em intervalos limitados, temos que $K = H_1 - H_2$ satisfaz a eq. $K = K * F$. Iterando,

$$K = K * F_{S_n}, \quad n \geq 1.$$

$$\therefore K(t) = \mathbb{E}\{K(t - S_n), S_n \leq t\}$$

$$\therefore |K(t)| \leq \|K\|_\infty \mathbb{P}(S_n \leq t) \quad \forall n \geq 1$$

$$\therefore |K(t)| \leq \|K\|_\infty \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = 0, \quad \forall t. \quad \square$$