Teorema de renovação de Blackwell

Def: Dado um intervalo $I \subset [0,\infty)$, seja

$$U(I) = \mathbb{E} \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{S_n \in I\} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n \in I)$$

o nº esperado de renovações ocorridas em I.

Def: (A distribuição de) T é dita aritmética se $\exists\, \delta > 0 : \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T = \delta k) = 1$.

Caso contrário, T será dita não-aritmética

Teorema (da Renovação) de Blackwell

1) Caso não aritmético

$$U([t, t+h]) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{h}{\mu}, \quad h > 0 \text{ fixo}$$

2) Caso aritmético

$$U([m\delta, m\delta + k\delta]) \longrightarrow \frac{(k+1)\delta}{\mu},$$

$k \in \{0,1,2,\dots\}$ fixo e $m \to \infty$ percorrendo os nºs inteiros

Prova (caso aritmético)

Podemos tomar $\delta = 1$ e $k = 0$:

queremos mostrar que

$$U(\{m\}) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = m) \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{\mu}$$

Dado $l \geq 0$, seja

$$Y_l = \inf\{k \geq 0 : S_n = l + k \text{ para algum } n \geq 0\}$$

$$= \inf\{k \geq 0 : \text{uma renovação ocorre em } l + k\}$$

Então, $Y = (Y_l)_{l \geq 0} \sim CM(\delta_0, P)$

em $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, com

$$\begin{cases} P_{0y} = \mathbb{P}(T = y - 1), & y \geq 1 \\ P_{x,x-1} = 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Além disso,

1) Y é irredutível e recorrente;

2) Y é recorrente positiva $\Leftrightarrow \mu < \infty$

(Exercício: verifique)

Note agora que

$$U(s_{m}) = \mathbb{P}(Y_m = 0) \xrightarrow[m \to \infty]{\text{Teo 6, Álbum 6}} \frac{1}{m_0} \overset{\text{verifique}}{=} \frac{1}{\mu} \qquad \square$$

Caso ~~não~~ aritmético : vide literatura

(p. ex., Durrett)