MAE 5709 - Introdução aos Processos Estocásticos — Exercícios # 1

Os exercícios extras não precisam ser entregues. Recomendo que os Exs. 2 e 5 sejam feitos. Os 3 últimos não precisam ser feitos.

1. Exercícios do livro, Capítulo 1: 1.2.2, 1.3.2, 1.6.1

2. *(Extra)* Seja $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$. Mostre que

   $$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+\ell} = x_\ell, \ldots, X_{n+1} = x_1 | X_n = x_0, X_{n-1} = x'_{n-1}, \ldots, X_0 = x'_0) \\ &= \mathbb{P}(X_\ell = x_\ell, \ldots, X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\end{aligned}$$

   para todo $\ell, n \geq 1$, $x_0, \ldots, x_\ell$, $x'_0, \ldots, x'_{n-1} \in \mathcal{S}$.

   Dica: Condicione sucessivamente as expressões nos dois lados da igualdade.

3. Seja $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S} = \{1, 2\}$. Diagonalize $\mathbf{P}$ e ache a distribuição de X_n, $n \geq 1$.

4. *(Extra)* Seja $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde μ é a distribuição uniforme em $\mathcal{S}$ e

   $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

   Ache uma expressão para a distribuição de X_n, $n \geq 1$.

   Dica: Use uma calculadora de operações matriciais, como, p.ex., o Alpha Wolfram (tome cuidado com os 0's que às vezes aparecem como números muito pequenos nessas calculadoras).

5. Considere o processo de ramificação começando com 1 indivíduo e com distribuição de prole de Poisson com taxa 1.2. Ache a probabilidade de extinção ρ dentro de uma margem de erro estipulada, digamos 10^{-6} a partir do seguinte raciocínio (que vale em geral no caso supercrítico).

Seja $\rho_0 = 0$ e para $n \geq 1$, faça $\rho_n = \varphi(\rho_{n-1})$, onde φ é a função geradora de probabilidade da distribuição de prole . Sabemos que $\rho_n \nearrow \rho$ quando $n \nearrow \infty$. Vamos estimar $\rho - \rho_n$:

$$\rho - \rho_n = \varphi(\rho) - \varphi(\rho_{n-1}) = \varphi'(\rho_n^*)(\rho - \rho_{n-1}) \leq \varphi'(\rho)(\rho - \rho_{n-1}), \quad (1)$$

onde φ' é a derivada de φ, $\rho_n^* \in (\rho_{n-1}, \rho)$, e a desigualdade segue de φ' ser crescente — lembre que φ tem todas as derivadas não negativas em $(0, 1)$. Observe que $0 \leq \varphi'(\rho) < 1$.

Iterando (1) n vezes, obtemos

$$\rho - \rho_n \leq [\varphi'(\rho)]^n(\rho - \rho_0) \leq [\varphi'(\rho)]^n. \quad (2)$$

Isso ainda não é muito útil, pois, ρ sendo desconhecido, $\varphi'(\rho)$ também é. Uma saída é obter (por tentativa e erro) $\bar{s} < 1$ tal que (a) $\bar{s} \geq \varphi(\bar{s})$ e (b) $\varphi'(\bar{s}) < 1$.

Um algoritmo para achar um tal número é o seguinte. Ache um número $s_0 < 1$ satisfazendo (a) —basta procurar próximo de 1—; se s_0 também satisfizer (b), então $\bar{s} = s_0$; se não, faça sucessivamente $s_1 = \varphi(s_0)$, $s_2 = \varphi(s_1), \ldots$, $s_n = \varphi(s_{n-1}), \ldots$, até que $\varphi'(s_n) < 1$. Note que $s_n \searrow \rho$, quando $n \nearrow \infty$, e, logo, pela continuidade de φ' e do fato que $\varphi'(\rho) < 1$, a iteração termina.

Finalmente, segue de (2) e do fato de ϕ' ser crescente, que

$$\rho - \rho_n \leq [\varphi'(\bar{s})]^n. \quad (3)$$

Agora basta tomar n grande o bastante para que $[\varphi'(\bar{s})]^n$ fique abaixo da margem de erro.

Os exercícios abaixo se referem a fatos notáveis do processo de ramificação. Os dois primeiros estabelecem o decaimento polinomial da probabilidade de sobrevivência até a geração n em exemplos na fase crítica *(adotando a terminologia apresentada em aula/nos slides).*
O último é sobre o processo supercrítico se tornar subcrítico quando condicionamos no evento de extinção.

6. *(Extra)* Considere o processo de ramificação com distribuição de prole Geométrica de parâmetro 1/2, i.e.,

$$\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k-1}, \; k \geq 0.$$

Note que $\mathbb{E}(X) = 1$, e logo se trata da fase crítica, com $\rho = 1$.

(a) Mostre que

$$P(G_n = j) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^j, & \text{se } j \geq 1, \\ \frac{n}{n+1}, & \text{se } j = 0 \end{cases} \tag{4}$$

seguindo os seguintes passos.

i. Calcule a função geradora de probabilidades da expressão à direita de (4) e obtenha

$$1 - \frac{1}{n + \frac{1}{1-s}}. \tag{5}$$

ii. Mostre por indução, usando $g_{G_n} = g_{G_{n-1}} \circ g_{G_1}$, que (5) é a função geradora de probabilidades de G_n.

(b) Mostre que a probabilidade de o processo se extinguir exatamente na n-ésima geração é $1/n(n+1)$. *Dica:* Condicione em G_{n-1}. Observe que o evento em questão ocorre se e somente se $G_{n-1} = j$ para algum $j > 0$ e os j membros de G_{n-1} têm todos 0 descendentes.

(c) Mostre que o valor esperado do tempo de vida da família (em número de gerações) é infinito ainda que a probabilidade de extinção seja igual a 1.

Dica: Seja T o tempo de vida da família. Observe que o evento $\{T = n\}$ é o evento do item anterior.

7. *(Extra)* Considere o processo de ramificação com distribuição de prole Binomial (2, 1/2). Trata-se de um caso *crítico* (em que a média de filhos por indivíduo vale 1).

O objetivo é mostrar que nesse caso $\mathbb{P}_1(G_n > 0)$ decai polinomialmente a 0 quando $n \to \infty$. (O mesmo compartamento se dá no caso crítico sempre que tivermos a variância da prole por indivíduo finita.)

Mais precisamente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} nP(G_n > 0) = 4. \tag{6}$$

Dica: Use o fato que $P(G_n = 0) = \varphi^{(n)}(0)$, onde $\varphi(s) \equiv \left(\frac{1+s}{2}\right)^2$ é a função geradora de probabilidades da distribuição Binomial $(2, 1/2)$, e

$\varphi^{(n)} = \varphi \circ \varphi^{(n-1)}$, onde $\circ$ indica composição. Faça $f_n = \frac{1}{4} n P(G_n > 0)$, mostre que $f_1 = \frac{3}{16}$ e para $n \geq 1$

$$f_{n+1} = (n+1)\frac{f_n}{n}\Big(1 - \frac{f_n}{n}\Big) = f_n\left[1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n+1}{n} f_n\right)\right]. \tag{7}$$

Para obter $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$, comece mostrando que

$$f_n \leq \frac{n}{n+1} \text{ para todo } n \geq 1, \tag{8}$$

do que, em combinação com (7), segue que (f_n) é uma sequência crescente e limitada, e portanto converge, digamos para f, e $f \leq 1$.

Suponha que $f < 1$, e obtenha uma contradição do fato que nesse caso, de (7) segue que, para todo n grande, $f_{n+1} \geq f_n(1 + c/n)$, onde c é uma constante positiva, e disso segue por sua vez que $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Obs. (8) equivale a

$$g_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ para todo } n \geq 1, \tag{9}$$

onde $g_n = f_n/n$, o que pode ser provado por indução: $g_1 = f_1 = \frac{3}{16} < \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, e temos a validade de (9) para $n = 1$; supondo (9) válida para $n = k \geq 1$, do fato que (7) equivale a

$$g_{n+1} = g_n(1 - g_n) \tag{10}$$

e que $x(1-x)$ é uma função crescente em $[0, 1/2)$, segue que

$$g_{k+1} = g_k(1 - g_k) \leq \frac{1}{k+1}\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{k}{(k+1)^2}.$$

Para concluir o passo de indução, basta verificar que

$$\frac{k}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k+2}.$$

8. *(Extra)* Seja (G_n) um processo de ramificação com prole distribuída segundo a variável aleatória X. Suponha que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$ e que $\mathbb{E}(X) > 1$. Nesse caso, como vimos, ambas as probabilidades de extinção e de sobrevivência são positivas.

Considere o processo (G_n) condicionado à extinção, e mostre que se trata de um processo de ramificação subcrítico com prole distribuída segundo a variável aleatória $\tilde{X}$ tal que

$$\mathbb{P}(\tilde{X} = k) = \rho^{k-1}\,\mathbb{P}(X = k),\ k \geq 0,$$

onde $\rho \in (0,1)$ é a probabilidade (incondicional) de extinção de (G_n).

Dica: Verifique, usando as propriedades de ρ, que a expressão acima é efetivamente uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória inteira não negativa, e que $\mathbb{E}(\tilde{X}) < 1$. Em seguida, escreva

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{g_0}(G_1 = g_1, \ldots, G_n = g_n | \mathcal{E}) &= \rho^{g_n - 1}\mathbb{P}_{g_0}(G_1 = g_1, \ldots, G_n = g_n) \\ &= P_{g_0 g_1} \cdots P_{g_{n-2} g_{n-1}} \{\rho^{g_n - 1} P_{g_{n-1} g_n}\}, \end{aligned} \tag{11}$$

onde $\mathcal{E}$ é o evento de extinção, e $P_{\cdot\cdot}$ são as probabilidades de transição de (G_n). A seguir, verifique que a expressão entre chaves pode ser escrita como

$$\rho^{g_{n-1} - 1} \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_{g_{n-1}}: \\ x_1 + \cdots + x_{g_{n-1}} = g_n}} \prod_{i=1}^{g_{n-1}} \rho^{x_i - 1}\mathbb{P}(X = x_i).$$

Observando agora que a expressão no produtório vale $\mathbb{P}(\tilde{X} = x_i)$, conclua que o somatório vale $\tilde{P}_{g_{n-1} g_n}$, a probabilidade de transição de um processo de ramificação com prole distribuída segundo $\tilde{X}$. Iterando, temos que o lado esquerdo de (11) vale

$$\tilde{P}_{g_0 g_1} \cdots \tilde{P}_{g_{n-2} g_{n-1}} \tilde{P}_{g_{n-1} g_n} = \mathbb{P}_{g_0}(\tilde{G}_1 = g_1, \ldots, \tilde{G}_n = g_n),$$

onde $(\tilde{G}_n)$ é o processo de ramificação com prole distribuída segundo $\tilde{X}$.