Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014

Turma A
1ª Questão:

a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^3}$. Calcule $f^{(30)}(0)$.

b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n}$

c) Encontre um valor para a soma do item b), quando $x = \dfrac{1}{2}$.

Solução:

a) Sabe-se que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3), |-2x^3| < 1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, x^{3n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Sabe-se que para uma série de potencias positivas $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, a_k é dado pelo coeficiênte de Taylor: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{30} = \dfrac{f^{(30)}(0)}{30!}$, o qual é coeficiente de x^{30}.

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n\, 2^n\, x^{3n}$.
Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 2^{10}x^{30}$, o que significa que o coeficiente de x^{30} na série é 2^{10}.
Sendo assim, temos: $\dfrac{f^{(30)}(0)}{30!} = 2^{10}$

$$\therefore f^{(30)} = 2^{10}\, 30!$$

b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2 x^{3n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercicio anterior. Repare que derivando em x, multiplicando por x, derivando mais uma vez e multplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+2x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, x^{3n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando em x:

$$\frac{-2\cdot 3x^2}{(1+2x^3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 3n\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-6x^3}{(1+2x^3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 3n\, x^{3n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Derivando mais uma vez:

$$\frac{-6[(3x^2)(1+2x^3)^2 - x^3\cdot 2(1+2x^3)6x^2]}{(1+2x^3)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{-6[3x^2-6x^5]}{(1+2x^3)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 2^n\, 9n^2\, x^{3n} = \frac{-18x^3(1-2x^3)}{(1+2x^3)^3},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

c) Como $x = \frac{1}{2}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item b), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 9n^2}{4^n} = \frac{-18\cdot\frac{1}{8}(1-2\cdot\frac{1}{8})}{(1+2\cdot\frac{1}{8})^3} = -\frac{3^3\, 4}{5^3} = -\frac{108}{125}$$

2ª Questão:

a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 3\,, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a1) Encontre uma série numérica cuja soma seja igual a $\displaystyle\int_0^{1/6} f(x)\,dx$.

a2) Encontre um valor aproximado para $\displaystyle\int_0^{1/6} f(x)\,dx$, com erro, em módulo, menor que 10^{-4}.

b) (1,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos de $g(x) = x(\pi - x)$, em $[0, \pi]$ é

$$\frac{8}{\pi}\left(\text{sen}x + \frac{\text{sen}(3x)}{3^3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5^3} + ...\right),$$

calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^6$.

Solução:

a1) Sabe-se que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$e^{3x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,x^n}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{e^{3x}-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,x^{n-1}}{n!}\,, \forall x \neq 0$$

Para x = 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,x^{n-1}}{n!} = 3$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,x^{n-1}}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$\int_0^{x'} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,x^n}{n\cdot n!}\Big|_0^{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,(x')^n}{n\cdot n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x' = 1/6$:

$$\int_0^{1/6} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n\,n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

a2) Deseja-se calcular $\displaystyle\int_0^{1/6} f(x)\,dx$ com $erro < \varepsilon = 10^{-4}$. Do item anterior, sabe-se que:

$$\int_0^{1/6} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!} \simeq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

Rapare que se não tivessemos $n\cdot n!$ multiplicando 2^n, teríamos a soma de uma PG de razão $1/2$, a qual é fácil de calcular o valor exato da soma.
Repare também que o termo $\frac{1}{n\cdot n!}$ é sempre decrescente, ou seja:

$$\frac{1}{n\cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)\cdot(k+1)!},\ \forall n \geq k+1$$

Sendo assim:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)(k+1)!}\frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\therefore 2^k(k+1)(k+1)! > \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$$

Para $k = 5$:

$$2^k(k+1)(k+1)! = 32\cdot 6\cdot 720 = 192\cdot 720 > 10^4$$

Portanto:

$$\int_0^{1/6} f(x)\,dx \simeq \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

Com $erro < 10^{-4}$.

b) Seja $\tilde{g}(x)$ a extensão ímpar de $g(x)$. A série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ é a série de senos de $g(x)$. Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ são:

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_{2n} = 0$$
$$b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$$

Aplicando a identidade de Parceval:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x)\,dx$$

Como $\tilde{g}(x)$ é impar, $\tilde{g}^2(x)$ é par. Além disso, como $\tilde{g}(x)$ é extensão ímpar de $g(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ para $x \in [0,\pi]$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g^2(x)\,dx$$

.

$$\int_0^{\pi} g^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} x^2\pi^2 - 2\pi x^3 + x^4\,dx = \left(\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{30}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^6}{960}$$

3ª Questão:

a) (2,0 pontos) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \Big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big[\text{ ou } x \in \Big]\frac{\pi}{2}, \pi\Big] \\ 2|x|\,, & \text{se } x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \end{cases}$$

Encontre a série de Fourier de f.

b) (1,5 pontos) Se $S(x)$ é a soma da série encontrada em a), esboce o gráfico de S no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, calcule $S\Big(39\dfrac{\pi}{2}\Big)$ e $S\Big(1223\dfrac{\pi}{8}\Big)$.

Solução:

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\,dx = \frac{2}{\pi}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(nx)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx = \frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\,dx = \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{n^2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0 \quad \text{(função ímpar)}$$

$$\therefore S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\Big) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{4(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}\Big)\cos(nx)$$

b) Pelo toerema da convergência da série de Fourier, $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
  - $f(x)$, onde f(x) é contínua
  - A média dos limites laterais, onde f(x) é descontínua

- $\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$, para $x=\pi$ ou $x=-\pi$
- Para $x \notin [-\pi,\pi]$: repete-se periodicamente.

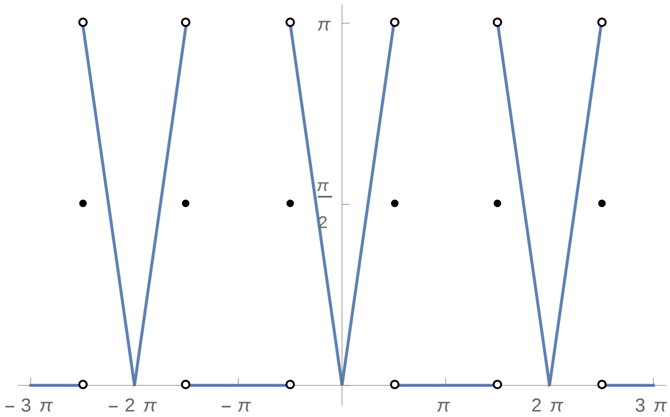

Figura 1: Série de Fourier de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

Sendo assim:

$$S\Big(\frac{39\pi}{2}\Big) = S\Big(17\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = S\Big(\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = S\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)+\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)) = \frac{1}{2}(\pi+0) = \frac{\pi}{2}$$

$$S\Big(1223\cdot\frac{\pi}{8}\Big) = S\Big(152\pi+\frac{7\pi}{8}\Big) = S\Big(\frac{7\pi}{8}\Big) = f\Big(\frac{7\pi}{8}\Big) = 0$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 13/10/2014

Turma B
1ª Questão:

a) (1,0 ponto) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+3x^4}$. Calcule $f^{(40)}(0)$.

b) Obtenha uma expressão para a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 3^n\, 16n^2\, x^{4n}$

c) Encontre um valor para a soma do item b), quando $x = \dfrac{1}{3}$.

Solução:

a) Sabe-se que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$ (soma da PG). Sendo assim:

$$\frac{1}{1+3x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-3x^4), |-3x^4| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, 3^n\, x^{4n}, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Sabe-se que para uma série de potencias positivas $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, a_k é dado pelo coeficiênte de Taylor: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Como a série encontrada foi expandida em torno de $x_0 = 0$, temos que: $a_{40} = \dfrac{f^{(40)}(0)}{40!}$, o qual é coeficiente de x^{40}.

O termo geral da série obtida é dado por $\bar{a}_n = (-1)^n\, 3^n\, x^{4n}$.
Para $n = 10$, temos $\bar{a}_{10} = 3^{10}x^{40}$, o que significa que o coeficiente de x^{40} na série é 3^{10}.
Sendo assim, temos: $\dfrac{f^{(40)}(0)}{40!} = 3^{10}$

$$\therefore f^{(40)} = 3^{10}\, 40!$$

b) Deseja-se encontrar uma expressão para $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, 3^n\, 16n^2x^{4n}$.

Pode-se observar que há uma certa semelhança entre os termos gerais desta série e da série do exercicio anterior. Repare que derivando em x, multiplicando por x, derivando mais uma vez e multplicando por x mais uma vez, chegamos na mesma expressão. Sendo assim:

$$\frac{1}{1+3x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, x^{4n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Derivando em x:

$$\frac{-3\cdot 4x^3}{(1+3x^4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, 4n\, x^{4n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{-12x^4}{(1+3x^4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, 4n\, x^{4n},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

Derivando mais uma vez:

$$\frac{-12[(4x^3)(1+3x^4)^2 - x^4\cdot 2(1+3x^4)12x^3]}{(1+3x^4)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, 16n^2\, x^{4n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\frac{-12[4x^3 - 12x^7]}{(1+3x^4)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, 16n^2\, x^{4n-1},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 3^n\, 16n^2\, x^{4n} = \frac{-36x^3(1-3x^4)}{(1+3x^4)^3},\, |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

c) Como $x = \frac{1}{3}$ está dentro do intervalo de convergência da série do item *b*), temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 16n^2}{27^n} = \frac{-36\cdot\frac{1}{27}(1-3\cdot\frac{1}{81})}{(1+3\cdot\frac{1}{81})^3} = -\frac{3^5\, 13}{2^3\, 7^3} = -\frac{3159}{2744}$$

2ª Questão:

a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0 \\ 2\,, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a1) Encontre uma série numérica cuja soma seja igual a $\displaystyle\int_0^{1/4} f(x)\,dx$.

a2) Encontre um valor aproximado para $\displaystyle\int_0^{1/4} f(x)\,dx$, com erro, em módulo, menor que 10^{-4}.

b) (1,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos de $g(x) = x(\pi - x)$, em $[0, \pi]$ é

$$\frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5^3} + ...\right),$$

calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^6$.

Solução:

a1) Sabe-se que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Sendo assim:

$$e^{2x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,x^n}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \frac{e^{2x}-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,x^{n-1}}{n!}\,, \forall x \neq 0$$

Para x = 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,x^{n-1}}{n!} = 2$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,x^{n-1}}{n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim:

$$\int_0^{x'} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,x^n}{n\cdot n!}\Big|_0^{x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\,(x')^n}{n\cdot n!}\,, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x' = 1/4$:

$$\int_0^{1/4} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n\,n\cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

a2) Deseja-se calcular $\displaystyle\int_0^{1/4} f(x)\,dx$ com $erro < \varepsilon = 10^{-4}$. Do item anterior, sabe-se que:

$$\int_0^{1/4} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!} \simeq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

O erro da aproximação é dado por:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

Rapare que se não tivessemos $n\cdot n!$ multiplicando 2^n, teríamos a soma de uma PG de razão $1/2$, a qual é fácil de calcular o valor exato da soma.
Repare também que o termo $\frac{1}{n\cdot n!}$ é sempre decrescente, ou seja:

$$\frac{1}{n\cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)\cdot(k+1)!},\ \forall n \geq k+1$$

Sendo assim:

$$erro = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!} \leq \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+1)!}\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)(k+1)!}\frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$\therefore 2^k(k+1)(k+1)! > \frac{1}{\varepsilon} = 10^4$$

Para $k = 5$:

$$2^k(k+1)(k+1)! = 32\cdot 6\cdot 720 = 192\cdot 720 > 10^4$$

Portanto:

$$\int_0^{1/4} f(x)\,dx \simeq \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n\,n\cdot n!}$$

Com $erro < 10^{-4}$.

b) Seja $\tilde{g}(x)$ a extensão ímpar de $g(x)$. A série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ é a série de senos de $g(x)$. Sabe-se que os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{g}(x)$ são:

$$a_0 = a_n = 0$$
$$b_{2n} = 0$$
$$b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)^3}$$

Aplicando a identidade de Parceval:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^2(x)\, dx$$

Como $\tilde{g}(x)$ é impar, $\tilde{g}^2(x)$ é par. Além disso, como $\tilde{g}(x)$ é extensão ímpar de $g(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g^2(x)\, dx$$

.

$$\int_0^{\pi} g^2(x)\, dx = \int_0^{\pi} x^2\pi^2 - 2\pi x^3 + x^4\, dx = \left(\frac{\pi^2 x^3}{3} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{30}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^5}{30} = \frac{\pi^6}{960}$$

3ª Questão:

a) (2,0 pontos) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \Big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\Big[\text{ ou } x \in \Big]\frac{\pi}{2}, \pi\Big] \\ 3|x|\,, & \text{se } x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \end{cases}$$

Encontre a série de Fourier de f.

b) (1,5 pontos) Se $S(x)$ é a soma da série encontrada em a), esboce o gráfico de S no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, calcule $S\Big(39\dfrac{\pi}{2}\Big)$ e $S\Big(1223\dfrac{\pi}{8}\Big)$.

Solução:

a)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x\,dx = \frac{3}{\pi}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3|x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x\cos(nx)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,dx = \frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\,dx = \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{2n} + \frac{(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{n^2}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{3\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{6(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0 \ \ \text{(função ímpar)}$$

$$\therefore\ S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)\Big) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{3\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n} + \frac{6(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1)}{\pi n^2}\Big)\cos(nx)$$

b) Pelo toerema da convergência da série de Fourier, $S(x)$ converge para:

- Para $x \in (-\pi, \pi)$:
  - $f(x)$, onde f(x) é contínua
  - A média dos limites laterais, onde f(x) é descontínua

- $\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$, para $x=\pi$ ou $x=-\pi$
- Para $x \notin [-\pi,\pi]$: repete-se periodicamente.

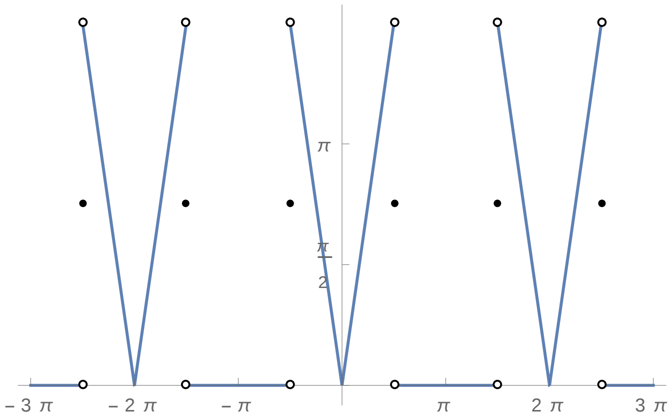

Figura 2: Série de Fourier de $f(x)$ para $x \in [-3\pi, 3\pi]$

Sendo assim:

$$S\Big(\frac{39\pi}{2}\Big) = S\Big(17\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = S\Big(\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = S\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)+\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)) = \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2}+0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$S\Big(1223\cdot\frac{\pi}{8}\Big) = S\Big(152\pi+\frac{7\pi}{8}\Big) = S\Big(\frac{7\pi}{8}\Big) = f\Big(\frac{7\pi}{8}\Big) = 0$$