Exercício 1

O número de acidentes milionários de clientes de uma seguradora em um ano é modelado por uma variável aleatória Poisson: $X \sim \text{Pois}(1)$. Estudos internos mostram que a seguradora tem capacidade de absorver os custos de até 5 acidentes milionários anuais. Calcule:

(a) [1 ponto] A probabilidade de a seguradora não conseguir absorver os custos em um ano;

Sabendo que X representa o número de acidentes que ocorrem em um ano, temos que o evento em que a seguradora é incapaz de absorver os custos se dá quando $X > 5$, logo temos

$$\Pr(X > 5) = 1 - \text{P}(X \leq 5) \approx 0,0005942 = 0,05942\%.$$

Logo, a probabilidade da empresa ser incapaz de absorver os custos em um ano é de $0,05942\%$.

(b) [1 ponto] A probabilidade de não ocorrer acidentes milionários em 2 anos;

Sabemos então que se o número de acidentes em um ano segue uma Poisson de parâmetro 1, o número de acidentes em dois anos (que iremos representar aqui por Y) segue uma Poisson de parâmetro 2. Disto, temos que

$$\Pr(Y = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} \approx 0,1353.$$

Isto é, a probabilidade de nenhum acidente milionário ocorrer dentro de dois anos é aproximadamente $0,1353$.

Exercício 2

Considere que um sistema eletrônico é utilizado todos os dias de forma independente até ocorrer uma falha. A probabilidade de ocorrer uma falha no dia de uso é de 2%. Calcule:

(a) [1 ponto] A probabilidade do sistema eletrônico não falhar antes do quarto dia;

Dada uma variável aleatória X qual representa o número de dias até a ocorrência de uma falha, temos que

$$\Pr(X \geq 4) = 1 - \Pr(X < 4) = 1 - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) - \Pr(X = 3) \approx 0,9412.$$

Logo, a probabilidade do sistema eletrônico não falhar antes do quarto dia é de aproximadamente $0,9412$.

(b) [1 ponto] A probabilidade de o sistema eletrônico falhar somente após o segundo dia;

Utilizando dos mesmos dados acima, temos que

$$\Pr(X > 2) = 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) = 0,9604.$$

Isto é, a probabilidade do sistema falhar apenas após o segundo dia é $0,9604$.

(c) [1 ponto] o valor esperado do número de dias de uso do sistema até ocorrer a falha.

Temos que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{0,02} = 50.$$

Isto é, o número esperado de dias até a ocorrência de uma falha durante o uso do sistema é 50 dias.

Exercício 3

Em uma inspeção de qualidade, considere um lote com 100 peças dentre as quais 10 são defeituosas. Suponha que 5 peças serão escolhidas aleatoriamente e sem reposição. Defina X como o número de peças defeituosas na amostra de 5 peças. Encontre:

(a) [1,25 pontos] O suporte de X;

Temos que o suporte de X é dado por

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

(b) [1,25 pontos] A probabilidade de não selecionar peças defeituosas;

Temos que esta probabilidade é dada por

$$\Pr(X = 0) \approx 0,5838.$$

Em conclusão, a probabilidade de não selecionar peças defeituosas é de 0,5838.

(c) [1,25 pontos] A probabilidade de selecionar exatamente 3 peças defeituosas;

A probabilidade associada é dada por

$$\Pr(X = 3) \approx 0,006384.$$

Isto é, a probabilidade de serem selecionados exatamente 3 peças defeituosas é aproximadamente $0,006384$.

(d) [1,25 pontos] A probabilidade de selecionar pelo menos duas peças defeituosas.

A probabilidade associada é dada por

$$\Pr(X \geq 2) = \Pr(X = 2) + \Pr(X = 3) + \Pr(X = 4) + \Pr(X = 5) \approx 0,07686.$$

Isto é, a probabilidade de serem selecionados pelo menos 2 peças defeituosas é aproximadamente $0,07686$.