Exercício

Seja (X, Y) um vetor aleatório, em que X é o número de operações financeiras com lucro dentre duas tentativas na primeira semana de operação, e Y é o número de operações financeiras com lucro dentre duas tentativas na segunda semana de operação. Considere a distribuição conjunta

$X \backslash Y$	0	1	2	$\Pr(X = x)$
0	$7/25$	$11/50$	0	$1/2$
1	$3/25$	$1/10$	$2/25$	$3/10$
2	$1/10$	$11/200$	$9/200$	$1/5$
$\Pr(Y = y)$	$1/2$	$3/8$	$1/8$	1

Calcule:

(a) [2 pontos] Os valores esperados $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$;

Temos que

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{10} = 0,7.$$
$$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

(b) [2 pontos] As variâncias $\mathbb{V}\text{ar}[X]$ e $\mathbb{V}\text{ar}[Y]$;

Primeiramente calculamos

$$\mathbb{E}[X^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{10} = 1,1.$$
$$\mathbb{E}[Y^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875.$$

Disto, calculamos a variância como segue

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{11}{10} - \frac{49}{100} = \frac{61}{100} = 0,61.$$
$$\mathbb{V}\text{ar}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{7}{8} - \frac{25}{64} = \frac{31}{64} = 0,484375.$$

(c) [2 pontos] Os valores esperados $\mathbb{E}[X \mid Y = 0]$, $\mathbb{E}[X \mid Y = 1]$ e $\mathbb{E}[X \mid Y = 2]$;

Calculamos como o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid Y = 0] &= 0 \cdot \Pr(X = 0 \mid Y = 0) + 1 \cdot \Pr(X = 1 \mid Y = 0) + 2 \cdot \Pr(X = 2 \mid Y = 0) \\
&= 0 \cdot \frac{\Pr(X = 0 \cap Y = 0)}{\Pr(Y = 0)} + 1 \cdot \frac{\Pr(X = 1 \cap Y = 0)}{\Pr(Y = 0)} + 2 \cdot \frac{\Pr(X = 2 \cap Y = 0)}{\Pr(Y = 0)} \\
&= 0 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{2}{1} + 1 \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{1} + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{1} = \frac{32}{50} = 0,64. \\
\mathbb{E}[X \mid Y = 1] &= 0 \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{8}{3} + 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{11}{200} \cdot \frac{8}{3} = \frac{336}{600} = \frac{14}{25} = 0,56. \\
\mathbb{E}[X \mid Y = 2] &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{8}{1} + 1 \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{8}{1} + 2 \cdot \frac{9}{200} \cdot \frac{8}{1} = \frac{34}{25} = 1,36.
\end{aligned}$$

(d) [2 pontos] Os valores esperados $\mathbb{E}[Y \mid X = 0]$, $\mathbb{E}[Y \mid X = 1]$ e $\mathbb{E}[Y \mid X = 2]$;

Calculamos como o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y \mid X=0] &= 0 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{2}{1} + 1 \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{2}{1} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{2}{1} = \frac{22}{50} = \frac{11}{25} = 0,44. \\
\mathbb{E}[Y \mid X=1] &= 0 \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{10}{3} + 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{10}{3} = \frac{13}{15} \approx 0,8667. \\
\mathbb{E}[Y \mid X=2] &= 0 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{1} + 1 \cdot \frac{11}{200} \cdot \frac{5}{1} + 2 \cdot \frac{9}{200} \cdot \frac{5}{1} = \frac{29}{40} = 0,725.
\end{aligned}$$

(e) [2 pontos] A variância $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y]$.

Para este exercício valemos do seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}[X,Y] \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] + 2\mathbb{E}[X \cdot Y] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Disto, calculamos o seguinte valor esperado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y] &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{7}{25} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{11}{50} + 0 \cdot 2 \cdot 0 \\
&\quad + 1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{25} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{25} \\
&\quad + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{11}{200} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{9}{200} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{4}{25} + \frac{22}{200} + \frac{36}{200} = \frac{20+32+22+36}{200} = \frac{11}{20}.
\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y] = \frac{61}{100} + \frac{31}{64} + \frac{11}{10} - \frac{7}{8} = \frac{2111}{1600} = 1,319375.$$