

Exercício 1

Considere que a porcentagem de dias em um ano em que a temperatura média fica abaixo de 20° graus Celsius pode ser aproximada por uma variável aleatória X com a seguinte função de distribuição acumulada.

$$\Pr(X \leq t) = F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ t^2(6 - 8t + 3t^2) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{se } 1 < t. \end{cases}$$

Calcule:

- (a) [1,5 pontos] A probabilidade de que, em mais de metade dos dias do ano, a temperatura fique abaixo de 20° graus Celsius;

$$\Pr(X > 1/2) = 1 - \Pr(X \leq 1/2) = 0,3125.$$

- (b) [2 pontos] São classificados como anos anormais aqueles onde em menos de 10% dos dias do ano ou em mais de 75% dos dias do ano a temperatura fica abaixo de 20° graus Celsius. Calcule a probabilidade de que um ano qualquer seja classificado como anormal;

$$\begin{aligned} \Pr(X > 3/4 \cup X < 1/10) &= \Pr(X > 3/4) + \Pr(X < 1/10) \\ &= 1 - \Pr(X \leq 3/4) + \Pr(X \leq 1/10) \\ &= 0,05078125 + 0,0523 = 0,10308125. \end{aligned}$$

Exercício 2

O tempo médio em anos até que um determinado mecanismo apresente defeito pode ser modelado por uma variável aleatória exponencial X de parâmetro $\lambda = 1$. Calcule:

- (a) [1,5 pontos] A probabilidade do mecanismo não apresentar defeito dentro dos 2 primeiros anos;

$$\Pr(X > 2) = 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2}) \approx 0,1353.$$

- (c) [2 pontos] A probabilidade que o mecanismo não apresente defeito dentro dos 4 primeiros anos, dado que ele não apresentou defeito dentro do primeiro ano.

$$\Pr(X > 4 \mid X > 1) = \Pr(X > 3) = 1 - \Pr(X \leq 3) = 1 - (1 - e^{-3}) \approx 0,04979.$$

Exercício 3

Um tubo de ensaio de 80ml é completamente preenchido de uma determinada substância química e subsequentemente aquecido para que seja observada uma reação de luminescência. Uma vez que a reação se encerra, uma certa quantidade (em ml) da substância química é consumida. Esta quantidade pode ser modelada a partir de uma variável aleatória uniforme X de mínimo 20 e máximo 80. Calcule:

- (a) [1,5 pontos] A probabilidade de que, ao final da reação, restem pelo menos 30ml da substância química no tubo de ensaio;

Para que reste pelo menos 30ml temos que encontrar o quanto foi consumido. Em um

tubo de 80ml temos que foi consumido $80\text{ml} - 30\text{ml} = 50\text{ml}$. Logo, temos que para restar pelo menos 30ml substância deve ser consumida em no máximo 50ml, ou seja,

$$\Pr(80 - X \geq 30) = \Pr(X \leq 50) = \frac{50 - 20}{80 - 20} = 0,5.$$

(b) [1,5 pontos] A quantidade esperada da substância que irá restar no tubo de ensaio;

O que nos resta é o total do tubo menos a quantidade que foi consumida.

$$\mathbb{E}[80 - X] = 80 - \mathbb{E}[X] = 80 - \frac{80 + 20}{2} = 80 - 50 = 30.$$