Exercício 1

Um atleta lança um peso e registra a distância de seu lançamento em metros. Sabendo-se que a distância alcançada pelo peso lançado pode ser modelada por uma variável aleatória X normal com esperança 12 e variância 4. Calcule (utilize a tabela da distribuição Normal dada em sala):

(a) [1 ponto] A probabilidade do lançamento exceder 16 metros;

$$\begin{aligned}\Pr(X > 16) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{16-12}{2}\right) = 1 - \Pr(Z \leq 2) \\ = 1 - [\Pr(Z < 0) + \Pr(0 < Z < 2)] \approx 0,0228.\end{aligned}$$

(b) [1 ponto] A probabilidade: $\Pr(|X - 14| < 2)$;

$$\begin{aligned}\Pr(|X-14| < 2) &= \Pr(12 < X < 16) = \Pr(X < 16) - \Pr(X \leq 12) \\ &= \Pr(Z < 4/2) - \Pr(Z < 0) = [\Pr(X < 0) + \Pr(0 < Z < 2)] - \Pr(X < 0) \\ &= 0,47725.\end{aligned}$$

Exercício 2

Em uma organização com 150 membros um estudo que concluiu que o número de membros favoráveis à aprovação de uma medida é distribuído de forma aproximadamente Binomial, com 3 em cada 5 dos eleitores favoráveis à medida. Calcule (utilize da aproximação Normal quando possível):

(a) [2 pontos] O valor esperado e variância do número de votos a favor da aprovação da medida;

$$\mathbb{E}[X] = np = 90 \quad \text{e} \quad \mathbb{V}\text{ar}[X] = np(1-p) = 36.$$

(b) [1 ponto] Se menos da metade do número de membros forem favoráveis a medida ela será descartada. Considerando essa informação, calcule a probabilidade da medida ser descartada;

$$\begin{aligned}\Pr(X < 75) &= \Pr(X \leq 74) \\ &\approx \Pr\left(Z < \frac{74 - 90 + 0,5}{6}\right) \\ &\approx \Pr(Z < -2,5833) = 1 - (\Pr(0 < Z < 2,5833) + \Pr(Z < 0)) \\ &\approx 1 - (0,4951 + 0,5) = 0,0049.\end{aligned}$$

Exercício 3

Seja a seguinte função de densidade de probabilidade conjunta para o vetor aleatório (X, Y).

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx & \text{se } 0 < y \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) [2 pontos] Encontre o valor de c;

$$\int_0^1 \int_0^x cxdydx = c\int_0^1 xy\Big|_{y=0}^{y=x} = c\int_0^1 x^2dx = c\frac{1}{3},$$

portanto c = 3.

(b) [2 pontos] Encontre as marginais $f(x)$ e $f(y)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 3xdy & \text{se } y < x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 3xy\Big|_{y=0}^{y=x} & \text{se } y < x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 3xdx & \text{se } 0 < y \leq x \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2\Big|_{x=y}^{x=1} & \text{se } 0 < y \leq x \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2) & \text{se } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(c) [1 ponto] Encontre as condicionais $f_{X \mid Y=y_0}(x)$ e $f_{Y \mid X=x_0}(y)$.

$$f_{X \mid Y=y_0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \frac{2x}{(1-y_0)(1+y_0)} & \text{se } y_0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_{Y \mid X=x_0}(y) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \begin{cases} \frac{1}{x_0} & \text{se } 0 \leq y < x_0, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$