# Exercício

Seja um vetor aleatório $(X_1, X_2)$ distribuído a partir de uma variável aleatória Normal conjunta, de parâmetros $\sigma_1^2 = 4$, $\sigma_2^2 = 16$, $\mu_1 = 10$ e $\mu_2 = 12$, e correlação $\mathbb{C}\text{orr}(X_1, X_2) = \rho$.

(a) Determine a covariância $\mathbb{C}\text{ov}(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$;

Pela definição de covariância, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\text{ov}(X_1 - X_2, X_1 + X_2) &= \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)] - \mathbb{E}[X_1 - X_2]\mathbb{E}[X_1 + X_2]\\ &= \mathbb{E}[X_1^2 - X_2^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 + \mathbb{E}[X_2]^2\\ &= \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 - \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2]^2\\ &= \mathbb{V}\text{ar}[X_1] - \mathbb{V}\text{ar}[X_2]\\ &= 4 - 16 = -12.\end{aligned}$$

Note aqui que esta covariância não depende do parâmetro $\rho$.

(b) Calcule $\Pr(X_1 > 12)$;

Como sabemos que a marginal de $X_1$ é dada por uma normal de parâmetros $\sigma_1^2 = 4$ e $\mu_1 = 10$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 > 12) &= 1 - \Pr(X_1 \leq 12),\\ &= 1 - \Pr(X_1 \leq 12),\\ &= 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{12 - 10}{2}\right),\\ &= 1 - \Pr(Z \leq 1),\\ &= 1 - \Pr(0 < Z \leq 1) - \Pr(Z \leq 0)\\ &\approx 0,1587.\end{aligned}$$

(c) Fixado $\rho = {}^{6}/_{10}$, calcule $\Pr(X_1 > 12 \mid X_2 = 16)$;

Sabemos que a distribuição condicional $X_1 \mid X_2 = t$ é dada por uma normal de parâmetros $\mu_1^\star = \mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(t - \mu_2) = 11,2$ e $(\sigma_1^\star)^2 = \sigma_1^2(1 - \rho^2) = 4 \cdot 0,64 = 2,56$.

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 > 12 \mid X_2 = 16) &= 1 - \Pr(X_1 \leq 12 \mid X_2 = 16),\\ &= 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{12 - 11,2}{1,6}\right),\\ &= 1 - \Pr\left(Z \leq 0,5\right),\\ &= 1 - \Pr\left(0 < Z \leq 0,5\right) - \Pr(Z \leq 0)\\ &\approx 0,3085.\end{aligned}$$

(d) Calcule $\Pr(|X_2 - 12| > 4)$;

Reescrevemos o necessário como

$$\begin{aligned}1 - \Pr(-4 < X_2 - 12 < 4) &= 1 - \Pr(8 < X_2 < 16)\\ &= 1 - \Pr\left(\frac{8 - 12}{4} < Z < \frac{16 - 12}{4}\right)\\ &= 1 - \Pr\left(-1 < Z < 1\right)\\ &= 1 - \Pr\left(0 < Z < 1\right) - \Pr(-1 < Z \leq 0)\\ &= 1 - 2\Pr\left(0 < Z < 1\right)\\ &\approx 1 - 0,6827 = 0,3173.\end{aligned}$$

(e) Fixado $\rho = 6/10$, calcule $\Pr(|X_2 - 12| > 4 \mid X_1 = 12)$;

Primeiramente, determinamos que a distribuição condicional $X_2 \mid X_1 = t$, qual possuí parâmetros $\mu_2^\star = \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(t - \mu_1) = 14,4$ e $(\sigma_2^\star)^2 = \sigma_2^2(1-\rho) = 10,24$. Reescrevemos então o necessário como

$$\begin{aligned}
1 - \Pr(-4 < X_2 - 12 < 4 \mid X_1 = 12) &= 1 - \Pr(8 < X_2 < 16 \mid X_1 = 12) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{8 - 14,4}{3,2} < Z < \frac{16 - 14,4}{3,2}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(-2 < Z < 0,5\right) \\
&= 1 - \Pr\left(0 < Z < 0,5\right) - \Pr(-2 < Z \leq 0) \\
&= 1 - \Pr\left(0 < Z < 0,5\right) - \Pr(0 \leq Z < 2) \\
&\approx 1 - 0,6687 = 0,3313.
\end{aligned}$$