Item a)

Demonstre que $A \cup B = B \cup A$:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \Omega\colon\ x \text{ pertence a } A \text{ OU } x \text{ pertence a } B\} \\ &= \{x \in \Omega\colon\ x \text{ pertence a } B \text{ OU } x \text{ pertence a } A\} \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

Usualmente, é necessário provar que $B \cup A \subseteq A \cup B$ e $A \cup B \subseteq B \cup A$, porém, em razão da trivialidade deste resultado, omitimos estes passos. Note aqui que, na passagem destacada em vermelho foi utilizado o fato que o resultado do uso do operador lógico OU ($\vee$) independe da ordem das proposições.

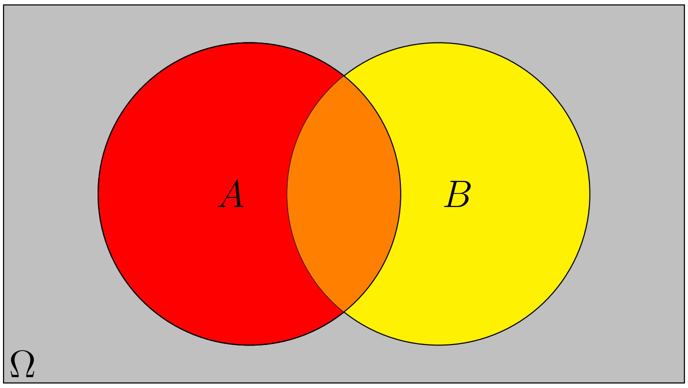

Figura 1: Conjuntos A e B com $A \cap B \neq \emptyset$.

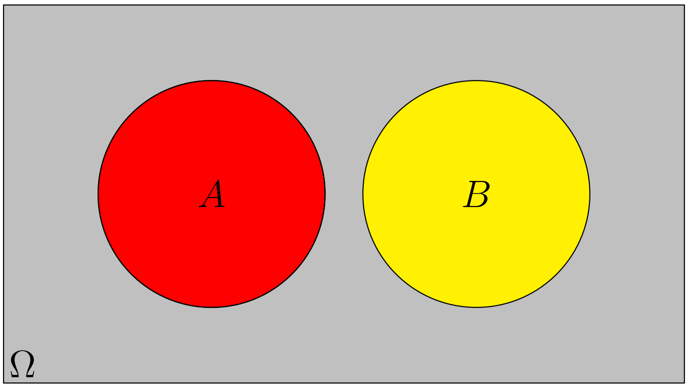

Figura 2: Conjuntos A e B com $A \cap B = \emptyset$.

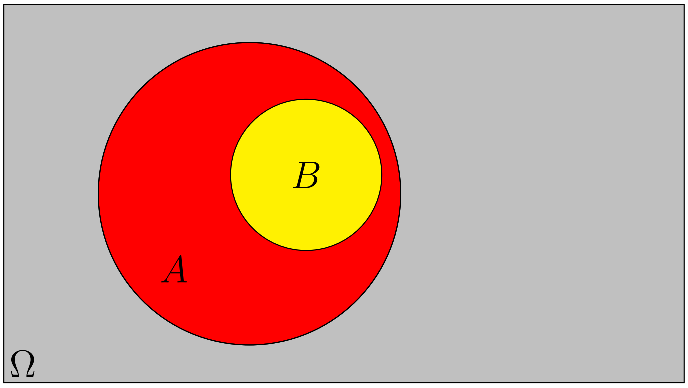

Figura 3: Conjuntos A e B com $B \subset A$.

Item b)

Demonstre que $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$:

Sabemos que se, e somente se, $B \subseteq A$ então x pertence a $B \Rightarrow x$ pertence a A.

É necessário demonstrar que $A \subseteq A \cup B$ e $A \cup B \subseteq A$, de forma que $A \cup B = A$. Primeiramente, demonstramos que $A \subseteq A \cup B$:

Dado um elemento x que pertence a A, então por hipótese x pertence a A ou x pertence a B. Logo, x pertence a $A \cup B$, e ademais temos que, uma vez que x pertence a A implica x pertence a $A \cup B$, logo $A \subseteq A \cup B$.

Em conseguinte, demonstramos que $A \cup B \subseteq A$:

Dado um elemento x que pertence a $A \cup B$, temos que este elemento x pertence a A ou x pertence a B. Trivialmente, se x pertence a A, isto implica que x pertence a A. Por sua vez, se x pertence a B, isto implica que x pertence a A, como destacado acima em vermelho. Uma vez que o fato de x pertencer a $A \cup B$ implica que x pertence a A, concluímos aqui que $A \cup B \subseteq A$.

Dado que, se $A \subset A$ temos $A \cup B \subseteq A$ e $A \cup B \subseteq A$, concluímos aqui que, dado $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$.

A Figura 3 apresenta uma visualização do caso em que $B \subset A$.

Item c)

Demonstre que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:

É necessário demonstrar que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ e $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$, de forma que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Primeiramente, demonstramos que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$:

$$
\begin{aligned}
x \text{ pertence a } (A \cap B)^c &\Rightarrow x \text{ pertence a } (A \cap B)^c \\
&\Rightarrow x \text{ não pertence a } A \cap B \\
&\color{red}{\Rightarrow x \text{ não pertence a } A \text{ OU } x \text{ não pertence a } B} \\
&\Rightarrow A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

Vale notar que, para chegarmos à conclusão demarcada em vermelho, valemos do princípio da lógica preposicional. O princípio estabelece que, para duas proposições a e b, $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$, isto é, a negação da conjunção de a e b é igual à disjunção da negação da proposição a e da negação da proposição b.

Uma vez que temos que x pertence a $(A \cap B)^c \Rightarrow x$ pertence a $A^c \cup B^c$, concluímos que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Em conseguinte, demonstramos que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$:

$$
\begin{aligned}
x \text{ pertence a } A^c \cup B^c &\Rightarrow x \text{ pertence a } A^c \text{ OU } x \text{ pertence a } B^c \\
&\Rightarrow x \text{ não pertence a } A \text{ OU } x \text{ não pertence a } B \\
&\color{blue}{\Rightarrow x \text{ não pertence a } A \cap B} \\
&\Rightarrow x \text{ pertence a } (A \cap B)^c
\end{aligned}
$$

Novamente, vale notar que, para chegarmos à conclusão demarcada em azul, valemos da direção inversa do princípio utilizado anteriormente.

Uma vez que temos que x pertence a $A^c \cup B^c \Rightarrow x$ pertence a $(A \cap B)^c$, concluímos que $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. Uma vez que demonstramos já que $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ e $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$, concluímos que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

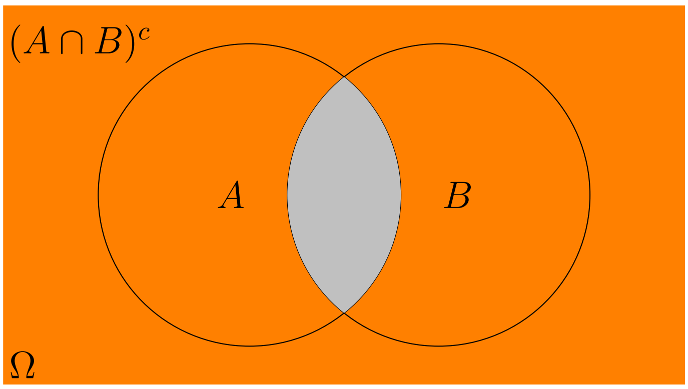

Figura 4: Figura exibindo $(A \cap B)^c$, a região desenhada em laranja.

Item d)

Demonstre que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$:

Suponha que $\exists\, x \in \Omega$ tal que $x \in (A - B) \cap (B - A)$, temos que

$$\begin{aligned}
x \text{ pertence a } (A - B) \cap (B - A) &\Rightarrow x \text{ pertence a } A - B \text{ E } x \text{ pertence a } B - A \\
&\Rightarrow x \text{ pertence a } A \cap B^c \text{ E } x \text{ pertence a } B \cap A^c \\
&\Rightarrow x \text{ pertence a } A \text{ E } x \text{ pertence a } B^c \\
&\ \text{E } x \text{ pertence a } B \text{ E } x \text{ pertence a } A^c \\
&\Rightarrow x \text{ pertence a } A \text{ E } x \text{ não pertence a } B \\
&\ \text{E } x \text{ pertence a } B \text{ E } x \text{ não pertence a } A \\
&\Rightarrow \overbrace{x \text{ pertence a } A \text{ E } x \text{ não pertence a } A}^{\text{CONTRADIÇÃO}} \\
&\ \overbrace{\text{E } x \text{ pertence a } B \text{ E } x \text{ não pertence a } B}^{\text{CONTRADIÇÃO}}
\end{aligned}$$

Demonstramos por via de contradição que não existe $x \in \Omega$ que pertence ao subconjunto $(A - B) \cap (B - A)$, logo concluímos que este subconjunto é o conjunto vazio $(\emptyset)$.

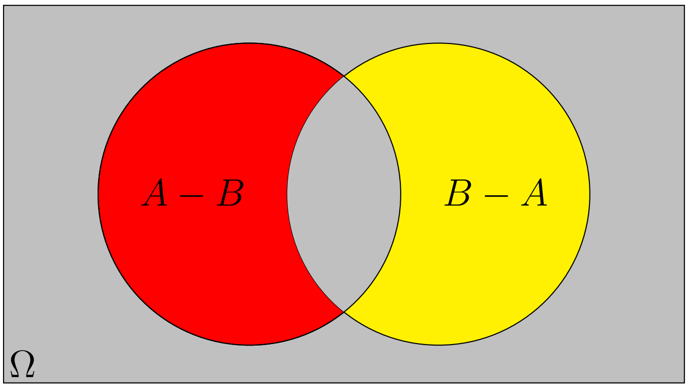

Figura 5: Figura exibindo $A - B$ e $B - A$, tomando em base os conjuntos vistos na Figura 1.