Item 1) [4 pontos]

Um lote contém 15 peças dentre as quais 4 são defeituosas. Considerando que a única característica que diferencia as peças é o fato de ser defeituosa, de quantas maneiras podemos escolher:

(a) [1 ponto] 3 peças defeituosas;

Temos 4 peças defeituosas no lote (para efeito ilustrativo, iremos as rotular de D, de forma que temos quatro D's), buscamos saber de quantas maneiras podemos organizar 3, o que resulta em:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

(b) [1 ponto] 4 peças sem defeito;

Temos 11 peças não defeituosas no lote (reutilizando do recurso ilustrativo, rotuladas de P's, de forma que temos 11 P's), buscamos saber de quantas maneiras podemos organizar 4, o que resulta em:

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!(11-4)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$$

(c) [1 ponto] 5 peças sendo apenas 1 defeituosa;

Buscamos organizar 4 peças não defeituosas e 1 defeituosa, o que resulta em:

$$\binom{11}{4} \cdot \binom{4}{1} = \frac{11!}{4!(11-4)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = 330 \cdot 4 = 1320$$

(d) [1 ponto] 4 peças sendo pelo menos 2 peças defeituosas.

Somamos as formas de organizar com 2 peças defeituosas e 2 sem defeito, 3 peças defeituosas e 1 sem defeito, e 4 peças defeituosas:

$$\binom{11}{2} \cdot \binom{4}{2} + \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{3} + \binom{11}{0} \cdot \binom{4}{4} = 55 \cdot 6 + 11 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 375$$

Item 2) [4 pontos]

Três mulheres e sete homens distintos devem formar uma fila. Encontre:

(a) [1 ponto] O número de filas distintas possíveis;

Vale destacarmos que, além de considerarmos distintos os indivíduos em decorrência do gênero, os homens são diferentes entre si, assim como as mulheres. O mesmo raciocínio será válido para as resoluções seguintes.

Temos 10 pessoas distintas, o que resulta em:

$$10! = 3628800$$

(b) [1 ponto] O número de filas distintas em que as mulheres formem um único bloco;

Primeiramente, fixamos o aglomerado de três mulheres como um oitavo indivíduo, isto é, consideramos que temos 7 rótulos H e 1 rótulo M^3. Desta forma, obtemos que é possível organizar estes 8 rótulos de 8! formas. Dentro do próprio rótulo há 3! ordenações diferentes de mulheres, de forma que o resultado é

$$8! \cdot 3! = 40320 \cdot 6 = 241920$$

(c) [2 pontos] O número de filas distintas em que duas mulheres nunca fiquem juntas.

Primeiramente, podemos escrever a disposição da fila apenas entre os homens, de forma que escrevemos

$$\text{Fila} = \{\_\_, H, \_\_, H, \_\_, H, \_\_, H, \_\_, H, \_\_, H, \_\_, H, \_\_\}$$

Vemos então que as três mulheres podem escolher 3 lugares em 8 opções, que por sua vez podem ser organizados de 3! maneiras diferentes, enquanto os homens podem ser organizados de 7! maneiras diferentes, o que resulta em

$$7! \cdot \binom{8}{3} \cdot 3! = 1693440$$

Item 3) [2 pontos]

(a) [1 ponto] Encontre o número de inteiros entre 100 e 500 que não contêm o dígito "0".

Primeiramente, fixamos os inteiros que tem o dígito 0 nas dezenas apenas. Temos que as centenas podem variar de 1 a 4, enquanto as unidades variam de 1 a 9. Logo, há $4 \cdot 9 = 36$ números com 0 apenas nas dezenas. Fixamos então as unidades e contamos os inteiros com 0 apenas nas unidades, o que resulta em $4 \cdot 9$ novamente. Por fim, contamos os números com 0 nas unidades e nas dezenas ao mesmo tempo, quais temos apenas 5 (100, 200, 300, 400, 500), uma vez que isso apenas ocorre em múltiplos de 100. O resultado é

$$36 + 36 + 5 = 77$$

Contamos então que há 77 inteiros entre 100 e 500 tem 0's, de forma que basta contar o número de números no todo no intervalo, que são 401, e concluímos então que há $401 - 77 = 324$ inteiros entre 100 e 500 que não incluem o dígito 0.

(b) [1 ponto] Encontre o número de inteiros entre 100 e 500 que contêm exatamente um dígito "0".

Vide o desenvolvimento acima, temos que há 72 números inteiros entre 100 e 500 com exatamente um dígito 0.