Item 1) [4 pontos]

Considere o experimento de lançar uma moeda (não necessariamente honesta) para cima e observar a face voltada para baixo quando estiver em repouso, e P uma medida de probabilidade definida sobre os eventos possíveis desse experimento. Suponha que $\mathrm{P}(\{\text{cara}\}) = k \cdot \mathrm{P}(\{\text{coroa}\})$, sendo k um valor conhecido. Encontre $\mathrm{P}(\{\text{cara}\})$ e $\mathrm{P}(\{\text{coroa}\})$ em função de k.

Temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\Omega) &= 1 \\
\mathrm{P}(\{\text{cara}\}) + \mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) &= 1 \\
k \cdot \mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) + \mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) &= 1 \\
(k+1) \cdot \mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) &= 1 \\
\mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) &= \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) = \frac{1}{k+1}$ e $\mathrm{P}(\{\text{cara}\}) = 1 - \mathrm{P}(\{\text{coroa}\}) = \frac{k}{k+1}$.

Item 2) [6 pontos]

Considere $A \subset \Omega, B \subset \Omega$ dois eventos tais que $\mathrm{P}(A) = 0,9$ e $\mathrm{P}(B) = 0,8$.

(a) [2 pontos] A e B podem ser disjuntos?

Definimos aqui um evento $D = (A \cup B)^c$, tal que D é disjunto de A e de B, $\mathrm{P}(D) \geq 0$ e a união dos conjuntos é $A \cup B \cup D = \Omega$. Disto, sabemos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\Omega) &= 1 \\
\mathrm{P}(A \cup B \cup D) &= 1 \\
\mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(D) &= 1 \quad (A,\ B \text{ disjuntos de } D) \\
\color{red}{\mathrm{P}(A \cup B)} &\color{red}{\leq 1} \qquad\qquad\quad (\mathrm{P}(D) \geq 0)
\end{aligned}$$

Se A e B são disjuntos, temos que

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = 0,9 + 0,8 = 1,7 > 1.$$

O que contradiz a condição destacada em vermelho, de forma que concluímos que A e B não podem ser disjuntos.

(b) [2 pontos] Qual o valor máximo para $\mathrm{P}(A \cap B)$?

Sabemos que $\mathrm{P}(A \cup B)$ segue o seguinte

$$\begin{array}{ccccc}
\max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\} & \leq & \mathrm{P}(A \cup B) & \leq & \min\{\mathrm{P}(\Omega), \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\} \\
0,9 & \leq & \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) & \leq & 1 \\
0,9 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) & \leq & -\mathrm{P}(A \cap B) & \leq & 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) \\
-0,8 & \leq & -\mathrm{P}(A \cap B) & \leq & -0,7 \\
0,7 & < & \mathrm{P}(A \cap B) & < & 0,8
\end{array}$$

Em conclusão, temos então que $\mathrm{P}(A \cap B)$ assume o valor de no máximo 0,8.

(c) [2 pontos] Assuma que $B \subset A$ e calcule $\mathrm{P}(A \cap B)$, $\mathrm{P}(A \cup B)$ e $\mathrm{P}(B - A)$ e $\mathrm{P}(A - B)$.

Sabemos que $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ e $A \cap B = B$. Podemos então calcular

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) = 0,9 \\
\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(B) = 0,8.
\end{aligned}$$

E por fim

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A - B) &= \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0,9 - 0,8 = 0,1 \\
\mathrm{P}(B - A) &= \mathrm{P}(B \cap A^c) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0,8 - 0,8 = 0.
\end{aligned}$$