Item 1) [4 pontos]

Considere Ω o evento certo e P uma medida de probabilidade sobre os eventos de Ω. Seja A um evento com probabilidade positiva, defina $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B|A)$. Mostre que P_A é de fato uma medida de probabilidade, ou seja, mostre que P_A satisfaz todas as propriedades das medidas de probabilidade estudadas em sala.

Temos uma medida de probabilidade P definida sobre os eventos de Ω. Temos que mostrar que a probabilidade definida como

$$\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)}$$

também é uma probabilidade. Vamos mostrar que P_A satisfaz as seguintes propriedades

- $\mathrm{P}_A(\Omega) = 1$

$$\mathrm{P}_A(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega|A) = \frac{\mathrm{P}(\Omega \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = 1,$$

  pois $\mathrm{P}(A) > 0$ por definição.

- $0 \leq \mathrm{P}_A(B) \leq 1$. Observe que pelas propriedades da probabilidade $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)$.

$$\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \leq \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = 1.$$

  Além disso, observe que $\mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \geq 0$, pois ambos $\mathrm{P}(A \cap B) \geq 0$ e $\mathrm{P}(A) > 0$ assim concluímos que $0 \leq P_A(B) \leq 1$ para qualquer evento B.

- Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos disjuntos, $\mathrm{P}_A(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{P}_A(B_i)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_A(\bigcup_{i=1}^n B_i) &= \mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^n B_i|A) \\
&= \frac{\mathrm{P}((\bigcup_{i=1}^n B_i) \cap A)}{\mathrm{P}(A)} \\
&= \frac{\mathrm{P}((\bigcup_{i=1}^n (B_i \cap A))}{\mathrm{P}(A)} \\
&\overset{\star}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{P}(B_i \cap A)}{P(A)} \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{P}_A(B_i)
\end{aligned}$$

  o passo $\star$ é válido pois P é uma probabilidade.

Item 2) [6 pontos]

Em uma certa população, um em cada três habitantes sofre com algum tipo de alergia e é classificado como alérgico. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação positiva a um certo antibiótico é de $3/4$. Para os não alérgicos essa probabilidade é de apenas $1/100$.

(a) [2 pontos] Escreva o conjunto Ω e os eventos relacionados "Pessoa ser alérgica" e "Pessoa apresentar reação positiva".

$$\begin{aligned}
\text{Conjunto } \Omega = \{ &(\text{alérgico}, \text{reação positiva}), \\
&(\text{não alérgico}, \text{reação positiva}), \\
&(\text{alérgico}, \text{reação não positiva}), \\
&(\text{não alérgico}, \text{reação não positiva})\}
\end{aligned}.$$

Evento A = "Pessoa ser alérgica", $A = \{(a, rp), (a, rnp)\}$, onde "$a$" indica um indivíduo alérgico, "rp" indica uma reação positiva, e "rnp" indica uma reação não positiva.
Evento B = "Pessoa apresentar reação positiva", $B = \{(a, rp), (na, rp)\}$, onde "$na$" indica um indivíduo não alérgico.

(b) [2 pontos] Calcule a probabilidade do indivíduo pertencer ao grupo de alérgicos dado que apresentou reação positiva.

Sabemos que $\mathrm{P}(B|A) = 3/4$; $\mathrm{P}(A) = 1/3$ e $\mathrm{P}(B|A^c) = 1/100$. Utilizando o Teorema de Bayes

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|B) &= \frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)P(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\mathrm{P}(A^c)} \\
&= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{150}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{154}{600}} = \frac{150}{154} = \frac{75}{77}
\end{aligned}$$

(c) [2 pontos] Verifique se os eventos "ser alérgico" e "apresentar reação positiva" são independentes.

Para independência é suficiente que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \to \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$. Mas pelo exercício anterior vimos que $\mathrm{P}(A|B) \neq \mathrm{P}(A)$. Portanto, A e B não são independentes.