Lista 6 - Inferência Frequentista (MAE0301)

Professor: Alexandre Patriota
Monitor: Andrey Sarmento
1^{o} semestre de 2025

Data de entrega: 23/04/2025

1. Considere uma a.a. $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ de $X \sim \mathbb{P}_\theta$, em que $\theta \in \Theta$. Calcule a informação de Fisher total para os seguintes casos e verifique se o estimador $\delta(\boldsymbol{X}_n)$ é assintoticamente eficiente para $g(\theta) = \theta$:
   (a) $X \sim \text{Exponencial}(\theta)$, em que $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$, e $\delta(\boldsymbol{X}_n) = 1/\overline{X}$.
   (b) $X \sim \text{Normal}(0, \theta)$, em que $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$, e $\delta(\boldsymbol{X}_n) = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i^2$.
   (c) $X \sim \text{Normal}(\theta, \theta)$, em que $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$,
   $$\delta_1(\boldsymbol{X}_n) = \overline{X} \quad \text{e} \quad \delta_2(\boldsymbol{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$
   Dica: Use resultados da distribuição qui-quadrado.

2. Seja $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim \text{Beta}(1, \theta)$, em que $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$, isto é,
   $$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$
   (a) Encontre o LICR para θ.
   (b) Encontre um estimador não viciado para θ que seja função de $\sum_{i=1}^n \log(1 - X_i)$.
   (c) Verifique se o estimador obtido no item anterior é assintoticamente eficiente e fracamente consistente para θ.
   Dica: Use que $-\log(1-X) \sim \text{Exponencial}(\theta)$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ e
   $$\int_0^\infty u^{a-1}e^{-bu}du = \frac{\Gamma(a)}{b^a}, \quad \forall\ (a,b) \in \mathbb{R}_+^2.$$

3. Seja $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ uma a.a. de $X \sim f_\theta$, em que $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_\theta[X] = \theta$ e $\mathbb{V}_\theta[X] = \sigma^2$, com $\sigma^2 \in (0, \infty)$ uma constante conhecida. Seja $U_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ uma v.a. independente da amostra $\boldsymbol{X}_n$. Considere o seguinte estimador para θ:
   $$\delta(\boldsymbol{X}_n) = \begin{cases} \overline{X}_n, & \text{se } U_n = 0; \\ \overline{X}_n + n, & \text{se } U_n = 1. \end{cases}$$
   (a) Verifique se $\delta(\boldsymbol{X}_n)$ é fracamente consistente para θ.
   (b) Calcule o $\text{EQM}_\theta[\delta(\boldsymbol{X}_n), \theta]$ e estude seu comportamento assintótico ($n \to \infty$).

   Dica:
   - $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$.
   - $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$.
   - $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{V}ar[\mathbb{E}[X|Y]] + \mathbb{E}[\mathbb{V}ar[X|Y]]$.