GABARITO DA PROVA 1

EXERCÍCIO 1.
Para estudar o sistema, devemos inicialmente escaloná-lo.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay+z=1 \\ x+y-az=a \end{cases} \underset{L_2-L_1}{\sim} \begin{cases} x+y+z=0 \\ (a-1)y=1 \\ x+y-az=a \end{cases} \underset{L_3-L_1}{\sim} \begin{cases} x+y+z=0 \\ (a-1)y=1 \\ -(a+1)z=a \end{cases}.$$

Assim obtemos o sistema escalonado. Ele será incompatível (não terá solução) se, e somente se, obtivermos uma igualdade do tipo $0x+0y+0z=\beta$, em que β é diferente de zero. Na expressão acima isto só pode ocorrer nas duas últimas linhas do sistema.

Na segunda linha do sistema escalonado, se $a=1$, então obtemos uma equação da forma $0y=1$. Logo o sistema é incompatível, ou seja, não tem solução se $a=1$.

Na terceira linha do sistema escalonado, se $a=-1$, então obtemos uma equação da forma $0z=-1$. Logo o sistema é incompatível também para $a=-1$.

Se a é diferente de 1 e de -1, então o sistema escalonado tem 3 equações não nulas e 3 incógnitas. Logo é compatível determinado (tem uma única solução). Para determinar as soluções, podemos proceder de duas maneiras.

Método 1.
Da última equação, calculamos que $z=\frac{-a}{1+a}$. Da segunda equação achamos que $y=\frac{1}{a-1}$. Por fim, da primeira achamos que $x=-y-z=\frac{1}{1-a}+\frac{a}{1+a}=\frac{1+2a-a^2}{1-a^2}$.

Método 2.
Continuamos o escalonamento:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ (a-1)y=1 \\ -(a+1)z=a \end{cases} \underset{\frac{1}{a-1}L_2}{\sim} \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=\frac{1}{a-1} \\ -(a+1)z=a \end{cases} \underset{\frac{1}{-a-1}L_3}{\sim} \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=\frac{1}{a-1} \\ z=\frac{a}{-a-1} \end{cases}$$

$$\underset{L_1-L_2}{\sim} \begin{cases} x+z=\frac{1}{1-a} \\ y=\frac{1}{a-1} \\ z=\frac{a}{-a-1} \end{cases} \underset{L_1-L_3}{\sim} \begin{cases} x=\frac{1}{1-a}+\frac{a}{a+1}=\frac{1+2a-a^2}{1-a^2} \\ y=\frac{1}{a-1} \\ z=\frac{a}{-a-1} \end{cases}.$$

Concluímos que $(x,y,z)=\left(\frac{1+2a-a^2}{1-a^2},\frac{1}{a-1},\frac{-a}{1+a}\right)$.

EXERCÍCIO 2.

a) Escrevemos

$$\begin{array}{rllll} 1= & 1\times 1 & & & \\ 1+t= & 1\times 1 & +1\times t & & \\ 1+t^2= & 1\times 1 & & +1\times t^2 & \\ t^3= & & & & 1\times t^3 \end{array}.$$

Logo

$$I_{CB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Para calcular I_{BC}, usamos que $I_{BC}=I_{CB}^{-1}$. Vamos inverter a matriz I_{CB}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1-L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Logo

$$I_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Basta usar $Y_C = I_{BC}X_B$, em que $X_B = (1,1,1,1)$. Neste caso

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo as coordenadas na base C são $(-1,1,1,1)$. Isto pode ser visto também diretamente, pois o polinômio com coordenadas $(1,1,1,1)$ na base B é $p(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Este polinômio pode ser escrito como $p(t) = (-1)1 + 1(1+t) + 1(1+t^2) + 1t^3$.

d) Sim, ambos são isomorfos. Como vimos em sala de aula $M_2(\mathbb{F})$ é um espaço vetorial de dimensão 4. $P_3(\mathbb{F})$ também é um espaço vetorial de dimensão 4, pois suas bases têm 4 elementos. Usamos agora o resultado que dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$ são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão. Como este é o caso, então eles são isomorfos.

Poderíamos resolver este problema também diretamente. De fato, basta definir explicitamente um isomorfismo entre os espaços, tal como $F : P_3(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ dado por

$$F(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Agora basta provar que a transformação linear dada acima é bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.

É injetora, pois se

$$F(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $a = b = c = d = 0$ e F é injetora.

É sobrejetora, pois seja $\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$ um elemento qualquer de $M_2(\mathbb{F})$. Logo existe um polinômio $x + yt + wt^2 + zt^3$, tal que $F(x + yt + wt^2 + zt^3) = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix}$. Logo a imagem de F é todo o espaço $M_2(\mathbb{F})$, e, portanto, a função é sobrejetora.

Exercício 3.

a) A base canônica de $P_2(\mathbb{F})$ tem 3 elementos, 1, t e t^2. Logo a dimensão, que é o número de elementos que as bases de um certo espaço vetorial finitamente gerado contém, é igual a 3.

b) Para verificar que $\{1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{F})$, devemos verificar dois fatos: É um conjunto linearmente independente (L.I.) e gera o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

Primeiro fato a ser verificado:$\{1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$ é um conjunto L.I.

De fato suponha que $\alpha_1(1+t^2) + \alpha_2(t+t^2) + \alpha_3(1+t+t^2) = 0$. Isto só ocorre se $(\alpha_1+\alpha_3)1 + (\alpha_2+\alpha_3)t + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t^2 = 0$. Como $\{1, t, t^2\}$ é base, e, portanto, é linearmente independente, isto só ocorre se $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Ou seja, $\alpha_1(1+t^2) + \alpha_2(t+t^2) + \alpha_3(1+t+t^2) = 0$ equivale a resolver ao sistema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right. \underset{L_3 - L_1}{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 - L_2}{\sim} \left\{ \begin{array}{r} \alpha_1 + \quad \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Como o sistema escalonado tem 3 equações não nulas e 3 incógnitas, concluímos que o sistema é compatível determinado, ou seja, tem uma única solução. Como o sistema é homogêneo, concluímos que a única solução é

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$. Isso também pode ser verificado diretamente. De fato, da última linha do sistema escalonado concluímos que $\alpha_3 = 0$. Substituindo na segunda linha, concluímos que $\alpha_2 = -\alpha_3 = 0$. Por fim substituindo α_3 por 0 na primeira linha, concluímos que α_1 também é zero. Assim obtemos:

$$\alpha_1(1+t^2) + \alpha_2(t+t^2) + \alpha_3(1+t+t^2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0).$$

Segundo fato a ser verificado:$\{1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$ gera o conjunto $P_2(\mathbb{F})$.

De fato seja $c_1 + c_2t + c_3t^2$ um elemento qualquer de $P_2(\mathbb{F})$. Devo mostrar que $c_1 + c_2t + c_3t^2$ é combinação linear dos elementos $1+t^2$, $t+t^2$ e $1+t+t^2$. Assim devo mostrar que existem α_1, α_2 e $\alpha_3 \in \mathbb{F}$ tais que $\alpha_1(1+t^2)+\alpha_2(t+t^2)+\alpha_3(1+t+t^2) = c_1+c_2t+c_3t^2$. Novamente isto equivale a $(\alpha_1+\alpha_3)1+(\alpha_2+\alpha_3)t+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t^2 = c_1+c_2t+c_3t^2$. Usando a independência linear de $\{1, t, t^2\}$, concluímos que esta condição equivale a resolver o sistema linear abaixo.

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = c_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = c_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c_3 \end{array}\right. \underset{L_3 - L_1}{\sim} \left\{\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_3 = c_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = c_2 \\ \alpha_2 = c_3 - c_1 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 - L_2}{\sim} \left\{\begin{array}{rr} \alpha_1 + \quad \alpha_3 = c_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = c_2 \\ -\alpha_3 = c_3 - c_1 - c_2 \end{array}\right. .$$

Como o sistema escalonado tem 3 equações não nulas e 3 incógnitas, concluímos que o sistema é compatível determinado, ou seja, tem uma única solução. Da última linha concluímos que $\alpha_3 = c_1 + c_2 - c_3$. Substituindo na segunda linha, concluímos que $\alpha_2 = c_2 - \alpha_3 = c_3 - c_1$. Por fim substituindo o valor de α_3 na primeira linha, concluímos que $\alpha_1 = c_1 - \alpha_3 = c_3 - c_2$. Assim concluímos que

$$(c_3 - c_2)(1+t^2) + (c_3 - c_1)(t+t^2) + (c_1 + c_2 - c_3)(1+t+t^2) = c_1 + c_2t + c_3t^2.$$

Logo todo elemento de $P_2(\mathbb{F})$ é combinação linear dos elementos de $\{1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$.

Poderíamos ter argumentado de uma maneira mais curta. Como vimos no item a, a dimensão de $P_2(\mathbb{F})$ é 3. Logo todo conjunto linearmente independente com 3 elementos é uma base e todo conjunto que gera $P_2(\mathbb{F})$ e que contém apenas 3 elementos também é uma base, pelos resultados vistos em sala de aula. Assim bastaria dizer que $\{1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2\}$ tem 3 elementos, tal qual a dimensão de $P_2(\mathbb{F})$ e provar que os elementos são L.I. ou que geram o espaço $P_2(\mathbb{F})$.

Exercício 4.

a) Seja $p \in P_2(\mathbb{F})$ um elemento arbitrário de $P_2(\mathbb{F})$, $p(t) = a+bt+ct^2$. Logo $F(p)(t) = t(a+bt+ct^2)' = bt+2ct^2$. Assim $p \in Ker(F)$ se, e somente se, $bt+2ct^2 = 0$. Sabendo que $\{t, t^2\}$ é um conjunto L.I. (de fato é um subconjunto da base canônica e todo subconjunto de um conjunto L.I. também é um conjunto L.I.), concluímos que $b = 0$ e $2c = 0$. Assim os elementos do núcleo de F são da forma $p(t) = a$, ou seja, múltiplos de 1. Concluímos que uma base do núcleo de F é $\{1\}$ e a dimensão do núcleo de F é 1.

Agora vemos que os elementos da imagem de F são da forma $bt + 2ct^2$, em que b e $c \in \mathbb{F}$ são arbitrários. Assim vemos que a imagem corresponde a todas as combinações lineares de $\{t, t^2\}$. Uma base para a imagem de F é $\{t, t^2\}$ e sua dimensão é 2.

b) Basta escrevermos

$$\begin{array}{r} F(1) = 0 \\ F(t) = tt' = 0 \times 1 + 1 \times t \\ F(t^2) = t\left(t^2\right)' = 0 \times 1 + 0 \times t + 2 \times t^2 \end{array}.$$

Assim a matriz F_B é dada por

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para achar as coordenadas de $p(t) = t^2$, basta observar que t^2 tem coordenadas $X_B = (0,0,1)$ na base B. Logo $F(p)$ tem coordenadas $F_B X_B$ na base B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Assim $F(p)$ tem coordenadas $(0,0,2)$. Isto é equivalente a dizer que $F(t^2) = 2t^2$.