GABARITO DA PROVA 2

Exercício 1.
Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt para os vetores $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,1,1)$.
O primeiro vetor da base ortonormal será

$$b_1 = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Para achar o segundo vetor da base ortonormal, basta calcularmos pela fórmula

$$b_2 = \frac{(0,1,1) - \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\left\|(0,1,1) - \left\langle (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\|} = \frac{(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\left\|(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\|} =$$

$$= \frac{(0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}{\left\|(0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Logo uma base ortonormal será $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right\}$.

Exercício 2.

a) Como já foi dada uma base ortonormal para o espaço basta usar a fórmula para um operador de projeção ortogonal e aplicá-la ao vetor $(1,0,0,0)$. Obtemos assim que a projeção de $(1,0,0,0)$ em W é dado por

$$\left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) + \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$
$$+ \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1)\rangle (0,0,0,1) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

Logo a projeção ortogonal do vetor $(1,0,0,0)$ sobre o subespaço W é o vetor $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

b) O complemento ortogonal do subespaço W é o conjunto de todos os vetores ortogonais aos vetores de W. Estes, por sua vez, são todos os vetores ortogonais à base de W. Assim basta achar os vetores $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)\right\rangle = 0$$
$$\left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)\right\rangle = 0$$
$$\langle (x,y,z,w), (0,0,0,1)\rangle = 0.$$

Isso equivale a achar o conjunto solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0 \\ w = 0. \end{array}\right. \begin{array}{c} \sim \\ \sqrt{2}L_1 \\ \sqrt{3}L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{c} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ w = 0. \end{array}\right. \begin{array}{c} \sim \\ L_2 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{c} x + y = 0 \\ -2y + z = 0 \\ w = 0. \end{array}\right. \begin{array}{c} \sim \\ L_1 + \frac{1}{2}L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{c} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ w = 0. \end{array}\right. .$$

Com o sistema escalonado, podemos agora achar as soluções em termos de z. Obtemos que $(x,y,z,w) = \left(-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z, 0\right)$ para $z \in \mathbb{R}^4$. Assim o complemento ortogonal de W é o subespaço

$$W^{\perp} = \left\{\left(-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z, 0\right), z \in \mathbb{R}\right\} = \left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)\right].$$

Exercício 3.

a)

$$F(1) = t(1)' + 1 = 1 = 1 \times 1 + 0 \times t + 0 \times t^2.$$
$$F(t) = t(t)' + t = 2t = 0 \times 1 + 2 \times t + 0 \times t^2.$$
$$F(t^2) = t(t^2)' + t^2 = 3t^2 = 0 \times 1 + 0 \times t + 3 \times t^2.$$

Assim a matriz da transformação linear F na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

O determinante de F é, por definição, o determinante de F em relação a qualquer base. Logo

$$\det(F) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

b) O determinante de uma transformação linear $T : V \to V$ é, por definição, o determinante da matriz de T em relação a uma base de V. Em particular podemos escolher uma base ortonormal. No entanto, por um resultado visto em sala de aula, uma isometria é representada numa base ortonormal por uma matriz ortogonal se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e unitária se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Porém, também por um resultado dado em sala de aula, o determinante de matrizes ortogonais em $\mathbb{R}$ e de matrizes unitárias em $\mathbb{C}$ tem módulo 1. Assim o determinante de T tem necessariamente módulo 1. (Basta lembrar que se A é uma matriz ortogonal, então $A^tA = I$, logo $\det(A^t)\det(A) = 1$, ou seja $\det(A)^2 = 1$, pois $\det(A^t) = \det(A)$. Assim $|\det(A)| = 1$. Se A é uma matriz unitária, então $A^*A = I$, logo $\det(A^*)\det(A) = 1$, ou seja, $|\det(A)|^2 = 1$, pois $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$. Assim $|\det(A)| = 1$.)

Exercício 4.

a) Vimos em sala de aula que uma transformação linear F é auto-adjunta se, e somente se, a matriz desta transformação em relação a uma base ortonormal é auto-adjunta, ou seja, $F_B^* = F_B$, o que equivale a dizer que $F_{Bij} = \overline{F_{Bji}}$. Isso de fato ocorre, logo F é auto-adjunta. Vimos também em sala de aula que uma transformação linear F em um espaço vetorial $\mathbb{C}$ é uma isometria se, e somente se, a matriz desta transformação em relação a uma base ortonormal é unitária, ou seja, $F_B^*F_B = I$. Isto não ocorre, pois

$$F_B^*F_B = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo F é auto-adjunta, porém não é uma isometria.

b) O polinômio característico de F é dado por

$$p_F(t) = P_{F_B}(t) = \det(F_B - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & i & 0 & 0 \\ -i & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-t & i \\ -i & 1-t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$= [(1-t)(1-t) - (i)(-i)]\,[(3-t)(3-t)] = [(1-t)^2 - 1](3-t)^2 = \left(1 - 2t + t^2 - 1\right)(3-t)^2 = \left(t^2 - 2t\right)(3-t)^2 = t(t-2)(3-t)^2.$$

Assim $p_F(t) = t(t-2)(t-3)^2$. Para calcular o determinante usamos o resultado dado em sala de aula

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B),$$

no caso

$$A = \begin{pmatrix} 1-t & i \\ -i & 1-t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3-t & 0 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix} \quad C = 0.$$

Os auto-valores são as raízes do polinômio característico. Logo são 0, 2 e 3.

c) Os auto-vetores associados ao auto-valor 0 são os vetores não nulos tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, são os elementos do conjunto solução diferente de zero do sistema linear abaixo

$$\left\{ \begin{array}{c} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \\ 3z = 0 \\ 3w = 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \sim \\ L_2 + iL_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} x + iy = 0 \\ 0y = 0 \\ 3z = 0 \\ 3w = 0 \end{array} \right. .$$

Assim o conjunto solução do sistema é $\{(-iy, y, 0, 0), y \in \mathbb{C}\} = [(-i, 1, 0, 0)]$, ou seja, os auto-vetores associados ao auto-valor 0 são os vetores cujas coordenadas na base B são $\{(-iy, y, 0, 0), y \in \mathbb{C}, y \neq 0\}$.

Os autovalores associados ao auto-valor 2 são os vetores não nulos tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff \left[\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, são os elementos do conjunto solução diferente de zero do sistema linear abaixo

$$\left\{ \begin{array}{c} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_2 - iL_1}{\sim} \quad \left\{ \begin{array}{c} -x + iy = 0 \\ 0y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{array} \right. .$$

Assim o conjunto solução do sistema é $\{(iy, y, 0, 0), y \in \mathbb{C}\} = [(i, 1, 0, 0)]$, ou seja, os auto-vetores associados ao auto-valor 2 são os vetores cujas coordenadas na base B são $\{(iy, y, 0, 0), y \in \mathbb{C}, y \neq 0\}$.

Os autovalores associados ao auto-valor 3 são os vetores não nulos tais que

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \iff \left[\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & i & 0 & 0 \\ -i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, são os elementos do conjunto solução diferente de zero do sistema linear abaixo

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x + iy = 0 \\ -ix - 2y = 0 \\ 0z = 0 \\ 0w = 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_2 - \frac{i}{2}L_1}{\sim} \quad \left\{ \begin{array}{c} -2x + iy = 0 \\ -\frac{3}{2}y = 0 \\ 0z = 0 \\ 0w = 0 \end{array} \right. \quad \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_2 \\ (-1)L_1}}{\sim} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x - iy = 0 \\ y = 0 \\ 0z = 0 \\ 0w = 0 \end{array} \right. \quad \underset{L_1 + iL_2}{\sim} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x = 0 \\ y = 0 \\ 0z = 0 \\ 0w = 0 \end{array} \right. .$$

Assim o conjunto solução do sistema é $\{(0, 0, z, w), z, w \in \mathbb{C}\} = [(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$, ou seja, os auto-vetores associados ao auto-valor 3 são os vetores não nulos cujas coordenadas na base B pertencem ao subespaço vetorial $[(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.

Concluímos que uma base formada por auto-vetores de F é dada por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, em que v_1, v_2, v_3 e v_4 têm coordenadas $(-i, 1, 0, 0), (i, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ em relação à base B, respectivamente .

d) Em relação a base $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ achada acima, cujos elementos têm coordenadas $(-i, 1, 0, 0)$, $(i, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ em relação à base B, respectivamente, vimos que

$$\begin{array}{c} F(v_1) = 0v_1 \\ F(v_2) = 2v_2 \\ F(v_3) = 3v_3 \\ F(v_4) = 3v_4 \end{array} .$$

Logo a matriz da transformação linear F em relação à base C, F_C, é dada por

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $F_C = I_{BC} F_B I_{CB} = (I_{CB})^{-1} F_B I_{CB}$, concluímos que F_C é uma matriz diagonal semelhante à F_B.