GABARITO DA PROVA SUBSTITUTIVA

Exercício 1.

a) Vemos que $F(x,y) = (x,y,x-y) = (x,0,x) + (0,y,-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1)$. Como x e y são arbitrários, concluímos que a imagem de F é o subespaço gerado por $(1,0,1)$ e $(0,1,-1)$, ou seja, $Im(F) = [(1,0,1),(0,1,-1)]$. Como $(1,0,1)$ e $(0,1,-1)$ são linearmente independentes já que se

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,-1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (0,0,0) \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

então concluímos que $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ é uma base da imagem de F. A dimensão da imagem de F é 2, já que sua base contém apenas dois elementos.

Para achar a dimensão do núcleo basta usar que

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(Núcleo(F)) + \dim(Im(F)) \implies 2 = \dim(Núcleo(F)) + 2.$$

Assim a dimensão do núcleo é 0. Outra forma de ver isto é achando os elementos que pertencem ao núcleo. Porém é imediato verificar que $F(x,y) = (x,y,x-y) = (0,0,0)$ se, e somente se, $x = y = 0$. Ou seja, o núcleo é o subespaço $\{(0,0)\}$ que tem dimensão 0.

b) Vemos que

$$\begin{array}{c} F(1,0) = (1,0,1) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ F(0,1) = (0,1,-1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) - 1(0,0,1). \end{array}$$

Logo

$$F_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2.

a) Existem ao menos três formas de se fazer este exercício. A primeira é escrevendo os elementos de C em relação a base canônica

$$\begin{array}{c} (a,0,1) = a(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1) \\ (0,1,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,0) \\ (1,0,a) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + a(0,0,1) \end{array}.$$

Agora usamos um resultado dado em sala de aula que nos diz que C é uma base se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \neq 0.$$

Como este determinante é $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$, vemos que se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, então C é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Uma outra forma de fazer este exercício é notar que C tem três elementos e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3. Logo é base se, e somente se, os vetores forem $L.I.$. Assim basta achar os valores de a para os quais os vetores de C são $L.I.$

Mas

$$\alpha_1(a,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,0,a) = (0,0,0)$$

se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 são soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} a\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + a\alpha_3 = 0 \end{array} \right. \underset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + a\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ a\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right. \underset{L_3 - aL_1}{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + a\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ (1-a^2)\alpha_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Vemos que o sistema é compatível determinado se, e somente se, $1 - a^2 \neq 0$. Ou seja, a única solução do sistema é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ se, e somente se, $a \neq \pm 1$. Logo C é um conjunto $L.I.$ se, e somente se, $a \neq \pm 1$ e, portanto, C é base se, e somente se, $a \neq \pm 1$.

Uma terceira solução é notar que C tem três elementos e a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3. Logo é base se, e somente se, os vetores gerarem todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Isto equivale a dizer que o sistema abaixo tem sempre solução para todos

$x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{c} a\alpha_1+\alpha_3=x \\ \alpha_2=y \\ \alpha_1+a\alpha_3=z \end{array}\right. \underset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{\sim} \left\{\begin{array}{c} \alpha_1+a\alpha_3=z \\ \alpha_2=y \\ a\alpha_1+\alpha_3=x \end{array}\right. \underset{L_3-aL_1}{\sim} \left\{\begin{array}{c} \alpha_1+a\alpha_3=z \\ \alpha_2=y \\ (1-a^2)\alpha_3=x-az \end{array}\right. ..$$

Isso ocorre se, e somente se, o sistema for compatível para todos os x, y, z. Fazendo o escalonamento como anteriormente pode-se verificar que isto ocorre se, e somente se, $a \neq \pm 1$.

Poderíamos não usar o argumento da dimensão e provar que os vetores são L.I. e geram $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $a \neq \pm 1$.

b) Basta escrever C como

$$\begin{array}{c} (a,0,1)=a(1,0,0)+0(0,1,0)+1(0,0,1) \\ (0,1,0)=0(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,0) \\ (1,0,a)=1(1,0,0)+0(0,1,0)+a(0,0,1) \end{array}.$$

Logo para $a \neq \pm 1$, temos

$$I_{CB}=\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{array}\right).$$

Exercício 3.

a)Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt para os vetores $v_1=(2,0,1)$ e $v_2=(0,1,1)$.
O primeiro vetor da base ortonormal será

$$b_1=\frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|}=\frac{(2,0,1)}{\sqrt{2^2+1^2}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Para achar o segundo vetor da base ortonormal, basta calcularmos pela fórmula

$$b_2=\frac{(0,1,1)-\left\langle (0,1,1),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\left\|(0,1,1)-\left\langle (0,1,1),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\|}=\frac{(0,1,1)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\left\|(0,1,1)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\|}=$$

$$=\frac{(0,1,1)-\left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)}{\left\|(0,1,1)-\left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)\right\|}=\frac{\left(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)}{\sqrt{\frac{45}{25}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)=\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3\sqrt{5}},\right).$$

Logo uma base ortonormal será $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3\sqrt{5}},\right)\right\}$.

b) O complemento ortogonal do subespaço W é o conjunto de todos os vetores ortogonais aos vetores de W. Estes, por sua vez, são todos os vetores ortogonais à base de W. Assim basta achar os vetores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{array}{c} \langle (x,y,z),(2,0,1)\rangle=0 \\ \langle (x,y,z),(0,1,1)\rangle=0 \end{array}$$

Isso equivale a achar o conjunto solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. .$$

Porém a solução deste sistema é $(x,y,z)=(-\frac{1}{2}z,-z,z)$, para $z \in \mathbb{R}$. Logo

$$W^{\perp}=\left\{\left(-\frac{1}{2}z,-z,z\right), z \in \mathbb{R}\right\}=\left[\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)\right].$$

Exercício 4.

a) O polinômio característico de F é dado por

$$p_F(t)=P_{F_B}(t)=\det(F_B-tI)=\det\left(\begin{array}{ccc} 3-t & 1 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{array}\right)=(3-t)^2(2-t).$$

Assim $p_F(t)=(3-t)^2(2-t)$.
Os auto-valores são as raízes do polinômio característico. Logo são 3 e 2.

b) Os auto-vetores associados ao auto-valor 3 são os vetores não nulos tais que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, são os elementos do conjunto solução diferente de zero do sistema linear abaixo

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Assim os auto-vetores associados ao auto-valor 3 são os vetores cujas coordenadas na base B têm a forma $(x, 0, 0)$ com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

Os auto-vetores associados ao auto-valor 2 são os vetores não nulos tais que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, são os elementos do conjunto solução diferente de zero do sistema linear abaixo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \underset{L_1 - L_2}{\sim} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}.$$

Assim os auto-vetores associados ao auto-valor 2 são os vetores cujas coordenadas na base B têm a forma $(0, 0, z)$ com $z \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$.

c) A transformação linear F não é diagonalizável, pois a multiplicidade algébrica do auto-valor 3 é 2, porém a sua multiplicidade geométrica é

$$\dim(Ker(F - 3I)) = \dim[(1, 0, 0)] = 1.$$

Logo as multiplicidade algébricas e geométricas do auto-valor 3 não coincidem, o que implica que F não é diagonalizável. Uma outra forma de ver que F não é diagonalizável é observando que os auto-vetores formam um subespaço vetorial de dimensão 2. Logo não existe uma base de V formada apenas de auto-vetores.